المحاضرة الرابعة:

تمهيد:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\ B \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

- ليكن $f:A\to B$ و $g:A\to C$ تشاكلان موديوليان ما هي الشروط الواجب توافرها لوجود تشاكل موديولي $h:B\to C$ بحيث $h\circ f=g$ وهل h وحيد؟

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

- ليكن $f:B\to A$ و $g:C\to A$ تشاكلان موديوليان ما هي الشروط الواجب توافرها لوجود تشاكل موديولي $h:C\to B$ بحيث $f\circ h=g$ وهل h وحيد؟

- جوابا على ما سبق لنأخذ المبرهنات التالية:

مبرهنة:

إذا كان $f:A\to B$ و $g:A\to C$ تطبيقين فإن القضيتين التاليتين متكافئتين:

$\boxed{1}$. يوجد تطبيق $h:B\to C$ يحقق $g=h\circ f$

$\boxed{2}$. أيا كان $x,y\in A$ بحيث $f(x)=f(y)$ فإن $g(x)=g(y)$

الإثبات: $(1)\Rightarrow(2)$:

$$\forall x,y\in A\ ;\ f(x)=f(y)$$
$$g(x)=(h\circ f)(x)=h(f(x))$$
$$=h(f(y))=(h\circ f)(y)=g(y)$$

$(2)\Rightarrow(1)$: لنأخذ العلاقة $t:\operatorname{Im} f\to C$

$$\forall x\in A,\ y\in \operatorname{Im} f\ ;\ t(y=f(x))=g(x)$$

لنبرهن على أن هذه العلاقة هي تطبيق.

إذا كان $\underbrace{f(x_1)}_{y_1}=\underbrace{f(x_2)}_{y_2}$ فإنه وحسب الفرض $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow t(f(x_1))=t(f(x_2))$

لنأخذ ممدود t إلى B حيث $h:B\to C$

$$\forall b\in B\ ;\ h(b)=\begin{cases} t(b) & \text{if } b\in \operatorname{Im} f \\ c_0\in C & \text{if } b\notin \operatorname{Im} f \end{cases}$$

ولنبرهن على أن h يحقق المطلوب

$$\forall x\in A ;\ (h\circ f)(x) = h(f(x)) = t(f(x)) = g(x)$$

أي أن $h\circ f = g$ وهو المطلوب.

مبرهنة :

ليكن $f: B\longrightarrow A$ و $g: C\longrightarrow A$ تطبيقين فإن القضيتين التاليين متكافئتين :

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

1- يوجد تطبيق $h: C\longrightarrow B$ يحقق $f\circ h = g$

2- $Im\, g \subseteq Im\, f$

الإثبات :

$(1)\Rightarrow(2)$:

$$\forall c\in C ;\ g(c)\in Im\, g$$

$$g(c) = (f\circ h)(c) = f(h(c)) \in Im\, f$$

وهو المطلوب.

$(2)\Rightarrow(1)$: $\forall x\in C ;\ g(x)\in Im\, g \subseteq Im\, f$

وبالتالي يوجد عنصر $y\in B$ حيث أن ليس بالضرورة أن يكون وحيد ولنرمز لأحد هذه العناصر بـ y_x وبذلك نحصل على تطبيق :

$$h: C\longrightarrow B$$
$$x\longmapsto y_x$$

$\forall x\in C ;\ (f\circ h)(x) = f(h(x)) = f(y_x) = g(x)$ وهو المطلوب

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[d, "g"] \\ \cdot \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

ملاحظات : 1- عندما $Im\, f \subseteq Im\, g$ فإن $g\circ h = f$

2- إن المبرهنتين السابقتين غير صحيحتين في لغة التشاكلات المودولية

3- ممدد تطبيق : $f: X\longrightarrow Y$ و $X\subseteq D$

ممدد f هو $h: D\longrightarrow Y$ وقاعدة ربطه هو ذلك التطبيق الذي يحافظ على صور عناصر X.

4- f تقابل $\Leftrightarrow g\circ f = f\circ g = I$ إحداهما تحقق متباين والأخرى تحقق غامر

نتائج :

I_1, ليكن $f: A\longrightarrow B$ فإن القضايا التالية متكافئة :

1 - f متباين

2 - يوجد $g : B \longrightarrow A$ بحيث $g \circ f = I_A$

3 - f قابل للاختزال من اليسار، إذا كان

$f \circ h = f \circ k \Rightarrow h = k$

~~[illegible]~~:

/II/ $f : A \longrightarrow B$ تطبيق فإن

f متباين $\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

وهذا يصلح إذا كانت قاعدة الربط موجودة

/III/ إذا f كان تشاكلا فإن $\ker f = 0 \Leftrightarrow f$ متباين

/IIII/ $f : A \longrightarrow B$ تطبيق والقضايا التالية متكافئة:

1 - f غامر

2 - يوجد تطبيق $g : B \rightarrow A$ بحيث $f \circ g = I$

3 - f قابل للاختزال من اليمين إذا كان $h \circ f = k \circ f \Rightarrow h = k$

انتهت المحاضرة...