الفصل الثالث

Subject .... التاريخ :

Date 2014/11/17 المحاضرة الحادية عشر .... الموضوع :

تبولوجيا الأعداد العقدية

لنعرف التابع

$$|\cdot|:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$(z_1,z_2)\longmapsto|z_1-z_2|$$

نلاحظ أن $|\cdot|$ تابع مسافة

وبالتالي $(\mathbb{C},|\cdot|)$ فضاء متري ندعوه بالفضاء المتري العقدي المألوف

كذلك

$$d:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$(z_1,z_2)\longmapsto d(z_1,z_2)$$

نلاحظ أن d تابع مسافة وبالتالي $(\mathbb{C},d)$ فضاء متري ندعوه بالفضاء المتري الكروي

تعاريف:

- نفرض $a\in\mathbb{C}$ عندئذ نعرف جوار النقطة a بأنه كل قرص مفتوح من الشكل $D(a,\varepsilon)$ حيث $\varepsilon>0$ ويسمى أحياناً بالجوار الدائري لـ a.
- نفرض $a\in\mathbb{C}$ و $A\subset\mathbb{C}$ عندئذ نقول عن a أنها نقطة داخلية بالنسبة للمجموعة A إذا وجد جوار لـ a محتوى تماماً في A

بمعنى آخر $\exists\varepsilon>0: d(a,\varepsilon)\subset A$

ونرمز لمجموعة النقط الداخلية لـ A بـ A° ونسميها داخل المجموعة A.

- نقول عن نقطة خارجية بالنسبة للمجموعة A اذا وجد جوار لـ a محتوى تماماً في متمم المجموعة A.

بمعنى آخر: $\exists\varepsilon>0: d(a,\varepsilon)\subset\mathbb{C}-A=A^c$

ونرمز لمجموعة النقاط الخارجية لـ A بـ $Ex(A)$

- نقول عن a أنها نقطة محيطية بالنسبة للمجموعة A اذا كانت ليست داخلية وليست خارجية بالنسبة للمجموعة A.

نرمز لمجموعة كل النقط المحيطية $Fr(A)$

- نقول عن a أنها نقطة ملاصقة لـ A إذا تحقق الشرط التالي

$$\forall\varepsilon>0: D(a,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$$

نرمز لمجموعة النقط الملاصقة لـ A بـ $\overline{A}$

Subject التاريخ:

Date الموضوع:

نقول عن a أنها نقطة تراكم لـ A إذا تحقق الشرط التالي

$\forall \varepsilon > 0 : D(a, \varepsilon) \cap (A - \{a\}) \neq \emptyset$

نرمز لمجموعة نقاط التراكم بالنسبة لـ A بـ A'

نفرض $A \subset \mathbb{C}$ عندئذ:
نقول عن A أنها مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$ إذا كانت كل نقطة من نقاطها داخلية.
بمعنى آخر:
$$\overset{\circ}{A} = A$$

نقول عن A أنها مجموعة مغلقة في $\mathbb{C}$ إذا كانت كل نقطة من نقاطها هي نقطة ملاصقة.
بمعنى آخر:
$$A = \bar{A}$$

مبرهنة: نفرض $A \subset \mathbb{C}$ عندئذ الشرط اللازم والكافي لكي تكون A مفتوحة أن تكون A^c مغلقة (A^c مغلقة $\Longleftrightarrow$ A مفتوحة)

نفرض $A \subset \mathbb{C}$ عندئذ نقول عن A أنها مجموعة محدودة في $\mathbb{C}$ إذا وجد قرص مفتوح مركزه الصفر (0) ويحوي جميع نقاط A
بمعنى آخر:
$$\exists R > 0 : A \subset D(0, R)$$

نفرض $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ عندئذ نعرف القطعة المستقيمة الواصلة بين z_1 و z_2 بأنها مجموعة النقاط الواصلة بين z_1 و z_2 ونرمز لها بـ
$$[z_1, z_2] = \{ z \in \mathbb{C} : z = t z_1 + (1-t) z_2 ; 0 \leq t \leq 1 \}$$

نفرض $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ عندئذ نعرف الخط المنكسر ذي الرؤوس $z_1, \dots, z_n$ ونرمز له بـ $[z_1, z_2, \dots, z_n]$ مجموعة القطع المستقيمة
$$[z_1, z_2] \cup \dots \cup [z_{n-1}, z_n]$$

نفرض $A \subset \mathbb{C}$ عندئذ نقول عن A أنها مجموعة محدبة إذا تحقق الشرط التالي
$$\forall z_1, z_2 \in A \Longrightarrow [z_1, z_2] \subset A$$

نفرض $A \subset \mathbb{C}$ عندئذ نقول عن A أنها مجموعة مترابطة إذا لم يكن بالإمكان تقسيمها إلى مجموعتين مفتوحتين A_1, A_2 غير خاليتين ومنفصلتين واجتماعهما يساوي لـ A
بمعنى آخر: A غير مترابطة $\Longleftrightarrow \left\{ \exists A_1, A_2 \subset A : \begin{array}{l} A_1 \cap A_2 = \emptyset \\ A_1 \cup A_2 = A \end{array} \right.$ مفتوحتين

Subject

Date

التاريخ :

الموضوع :

مبرهنة

نفرض $A \subset \mathbb{C}$ مجموعة محدودة عندئذ المسافة المألوفة والمسافة الوترية متكافئتين

بمعنى أن:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \exists \alpha, \beta > 0 : \alpha |z_1 - z_2| \leq d(z_1, z_2) \leq \beta |z_1, z_2$$

الاثبات: لدينا

$$d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(|z_1|^2+1)(|z_2|^2+1)}}$$

بما أن A محدودة عندئذ:

$$\exists R > 0 : A \subset D(0, R)$$

ومنه:

$$|z_1| < R , \ |z_2| < R$$

ومنه

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{|z_1|^2+1} < \sqrt{R^2+1} \\ \sqrt{|z_2|^2+1} < \sqrt{R^2+1} \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{(|z_1|^2+1)+(|z_2|+1)}} > \frac{1}{R^2+1}$$

كما أن: $d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(|z_1|^2+1)(z_2^2+1)}} \leq 2|z_1 - z_2|$

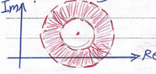
$$\longrightarrow d(z_1, z_2) > \frac{1}{R^2+1} |z_1 - z_2|$$

مبرهنة (بدون اثبات)

نفرض $A \subset \mathbb{C}$ عندئذ إذا أمكن الوصل بين أي نقطتين من A بخط منكسر محتوى بأكمله في A عندئذ A مترابطة أما العكس غير صحيح بالضرورة.

مثال $C(0,1)$ مترابطة لكن لا يمكن الوصل بين اي نقطتين بخط منكسر.

نفرض $A \subset \mathbb{C}$ عندئذ نقول عن A أنها منطقة إذا كانت A مفتوحة ومترابطة.



مثل: نقول عن المنطقة A أنها وحيدة الترابط إذا كانت لا ~~تفصل~~ تقسم المستوى العقدي الى قسمين منفصلين تماماً.

نعرف جوار الـ ∞ بأنه خارج أي قرص من الشكل $D(0,R)$ حيث نرمز له $V(\infty)$ ويكون:

$$V(\infty) = \{ z \in \mathbb{C} : |z| > R \ : R > 0 \}$$

نعرف τ مجموعة المجموعات المفتوحة في الفضاء المتري العقدي المألوف $\mathbb{C}$ عندئذ τ تشكل تبولوجيا على $\mathbb{C}$ تسمى بالتبولوجيا المألوفة على $\mathbb{C}$ كما ندعو $(\mathbb{C}, \tau)$ بالفضاء التبولوجي العقدي المألوف.

انتهت المحاضرة الخامسة عشر