حل . أوجد الحل العام:

1) $(x+y+1)\,dx + (x-y^2+3)\,dy = 0$

$M(x,y) = x+y+1 \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1$

$N(x,y) = x-y^2+3 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \quad \Rightarrow$

إذاً المعادلة تامة

$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \ell(y)$

$= \int (x+y+1)\,dx + \ell(y)$

$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + yx + x + \ell(y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \ell'(y) = x - y^2 + 3$

$\ell'(y) = -y^2 + 3 \Rightarrow \ell(y) = -\frac{1}{3}y^3 + 3y + c$

$$\boxed{F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + x - \frac{1}{3}y^3 + 3y + c}$$

الحل العام

2) $(4x^3y^2 - 2xy)\,dx + (3x^4y^2 - x^2)\,dy = 0$

$M(x,y) = (4x^3y^3 - 2xy)$

$N(x,y) = (3x^4y^2 - x^2)$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 12x^3y^2 - 2x$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 12y^2x^3 - 2x \quad \Rightarrow$ المعادلة تامة

/ /

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \ell(y)$$

$$= \int (4x^3y^3 - 2xy)\,dx + \ell(y)$$

$$= x^4y^3 - x^2y + \ell(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 3\cancel{x^4}y^2 - x^2 + \ell'(y) = 3\cancel{x^4}y^2 - x^2$$

$$\Rightarrow \ell'(y) = 0 \Rightarrow \ell(y) = c$$

بالتالي.

$$\boxed{F(x,y) = x^4y^3 - x^2y + c}$$

هو الحل العام.

(3) $(2x + 3y + 4)\,dx + (3x + 4y + 5)\,dy = 0$

$M(x,y) = 2x + 3y + 4$

$N(x,y) = 3x + 4y + 5$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 3$$

إذاً المعادلة تامة

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \ell(y)$$

$$= \int (2x + 3y + 4)\,dx + \ell(y)$$

$$F(x,y) = x^2 + 3yx + 4x + \ell(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cancel{3x} + \ell'(y) = \cancel{3x} + 4y + 5$$

$$\ell'(y) = 4y + 5$$

$$\ell(y) = 2y^2 + 5y$$

الحل العام $\boxed{F(x,y) = x^2 + 3yx + 4x + 2y^2 + 5y}$

مثال 4

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y - x)\,dy = 0$$

أوجد الحل العام بطريقتين:

الطريقة 1:

$$\frac{1}{x^2}\,dx - y\,dx + y\,dy - x\,dy = 0$$

$$df(x,y) = -d\frac{1}{x} + d\frac{1}{2}y^2 - d(x.y) = c$$

$$= d\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}y^2 - xy\right) = c$$

$$\boxed{f(x,y) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}y^2 - xy = c}$$

الطريقة 2:

$$M(x,y) = \frac{1}{x^2} - y$$

$$N(x,y) = y - x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

إذاً المعادلة تامة

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \ell(y)$$

$$F(x,y) = \int \left(\frac{1}{x^2} - y\right) dx + \ell(y)$$

$$F(x,y) = -x^{-1} - yx + \ell(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \cancel{-x} + \ell'(y) = y \cancel{-x}$$

$$\ell'(y) = y \Rightarrow \ell(y) = \tfrac{1}{2} y^2 + c$$

الجواب $\boxed{F(x,y) = -\tfrac{1}{x} - yx + \tfrac{1}{2} y^2 + c}$

* ملاحظة :

① عندما يطلب : حل المعادلة العامة بطريقتين فعلينا أن نحلها بطريقة التفاضل التام & طريقة الحل العام ②.

انتهى.