بالتماثل الاول نلاحظ أن: إذا كان f غامر فإن $M/\ker f \cong N$

وإذا كان f متباين فإن $M \cong Im$

المحاضرة الثامنة: مبرهنات التماثل

بناء موديول خارج القسمة:

ليكن N موديول جزئي من موديول M على حلقة R ولنعرف على M العلاقة الثنائية كما يلي:

$$x \sim y \iff x - y \in N \quad (\forall x, y \in N)$$

نجد أن $\sim$ هي علاقة تكافؤ في M حيث أن تكافؤ أي عنصر $x \in M$

$$[x] = \{ m \in M : x \sim m \} = \{ m \in M : x - m \in N \} = x + N$$

نرمز لمجموعة صفوف التكافؤ في M بالرمز M/N

ولنعرف على M/N قانون التشكيل:

داخلي $(+)$: $(x+N) + (y+N) = (x+y) + N$

$\underbrace{\text{خارجي } (.)}_{\text{مجموعة مؤثرات } R}$: $\alpha(x+N) = \alpha x + N$

نجد أن $(M/N, +, .)$ موديول على R

ويسمى موديول خارج القسمة M على N

وأن التطبيق

$$\pi : M \longrightarrow M/N$$

$\pi(x) = x + N$ هو تشاكل موديول غامر نواته N

ويسمى (الغمر القانوني).

ملاحظة:

إن كل موديول جزئي من M/N هو من الشكل A/N حيث $N \subseteq A$ ،

حيث A جزئي من M .

مبرهنة التماثل الأولى:

إذا كان $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً موديولياً فإن $M/\ker f \cong Im f$

الإثبات:

لنأخذ العلاقة $\varphi : M/_{\ker f} \longrightarrow Im f$ بحيث $\varphi(x + \ker M) = f(x)$

وذلك $\forall\, x + \ker f \in M/_{\ker f}$

ومن نظرية الزمر نجد أن φ تماثل زمري.

ولنبرهن الشرط $\varphi(\alpha x) = \alpha\, \varphi(x)$ لإتمام المطلوب

أياً كان $x+\ker f \in M/\ker f \wedge \alpha \in R$ فإن

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha(x+\ker f)) &= \varphi(\alpha x+\ker f)\\
&= f(\alpha x)\\
&= \alpha . f(x) \quad \longleftarrow \text{كون } f \text{ تشاكل}\\
&= \alpha . \varphi(x+\ker f) \qquad \#
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f^+"] \arrow[d, "\pi"'] & \operatorname{Im} f \\
M/\ker f \arrow[ur, dashed, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

π الغمر القانوني

ومن أجل المخططات التبادلية:

ولنبحث عن وجود التماثل المودولي التالي:

$$\varphi : M/\ker f \longrightarrow \operatorname{Im} f$$

بما أن $\ker \pi = \ker f = \ker f^+$

فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد متباين $\varphi : M/\ker f \longrightarrow \operatorname{Im} f$

ويحقق $\varphi \circ \pi = f^+$ ويكون φ غامراً لأنه أياً كان $f(x) \in \operatorname{Im} f$ فإنه يوجد $x+\ker f \in M/\ker f$ بحيث $\varphi(x+\ker f) = f(x)$

إذاً φ تماثل مودولي وحيد يحقق $\varphi \circ \pi = f^+$

ملاحظة: التماثل $M/\ker f \cong \operatorname{Im} f$ ليس التماثل الوحيد ولكنه الوحيد الذي يحقق مخططه $\varphi \circ \pi = f^+$.

مبرهنة التماثل الثانية:

إذا كان N ، A ، P مودولات جزئية من M و P جزئياً من N فإن:

نعرّف تشاكل: $\varphi : M/A \to M/N$
ونثبت أن N/P نواته

$$M/N = \frac{M/P}{N/P}$$

لنأخذ العلاقة: $\varphi : M/A \longrightarrow M/N$

$$\varphi(x+A) = x+N$$

فإن φ تشاكل زمري غامر نواته N/P

يكفي إذاً أن يكون φ يحقق الشرط الثاني لكي يصبح تشاكل مودولي

$\forall \alpha \in R \wedge x+A \in M/A$

فإن:

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha(x+A)) &= \varphi(\alpha x+A)\\
&= \alpha x+N\\
&= \alpha(x+N)\\
&= \alpha . \varphi(x+A) \qquad \#
\end{aligned}$$

مبرهنة التماثل الثالثة :

إذا كانت P, N موديولين جزئيين من موديول M فإن

$$P+N/N \cong P/P\cap N$$

الإثبات :

$\pi : P+N \longrightarrow P+N/N$ الغمر القانوني

$J : P \longrightarrow P+N$ التباين القانوني

$\pi\circ J : P \longrightarrow P+N/N$ وهو تشاكل موديولي غامر نواته $P\cap N$

لدينا :

أياً كان $x \in \ker(\pi\circ J)$ فإن $(\pi\circ J)(x) = N$

$\pi(J(x)) = N$

$\pi(x+n) = N$ ، $n \in N$

$(x+n) = N \Rightarrow x \in N \Rightarrow x \in P\cap N$

وأخيراً نجد أن

$P/P\cap N \cong P+N/N$

انتهت المحاضرة ...