الموضوع: المحاضرة 17 التاريخ: 2014/11/25

الفصل الرابع

التكامل العددي

بفرض $y = f(x)$ تابع مستمر على المجال $[a, b]$ عندئذ لحساب $I = \int_a^b f(x)\,dx$ نقوم بإيجاد التابع الأصلي $F(x)$ للتابع $f(x)$ فيكون

كل مستمر قابل للمكاملة لكن ليس كل قابل للمكاملة مستمر

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

لكن إيجاد $F(x)$ من المواضيع الصعبة جداً فمثلاً

$f(x) = e^{x^2} \cos(\ln(x+1))$ إيجاد التابع الأصلي

صعب لذلك نلجأ للطرق العددية لحساب التكاملات

أولاً: طريقة المستطيلات:

بفرض $f(x)$ تابع مستمر على المجال $[a, b]$ عندئذ نقوم بتجزئة المجال $[a, b]$ إلى n جزء متساوي الطول حيث طول كل مجال h فيكون

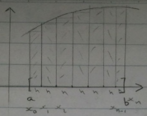
مشان الدقة التجزئة متساوية

$$h = \frac{b-a}{n}$$

نضع:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n]$$



عندئذ تكون المساحة المطلوبة تساوي تقريباً مجموع مساحات كل من المستطيلات الموضحة بالشكل ومساحة كل مستطيل:

$$(x_{i+1} - x_i) f(x_i) = h . f(x_i) \quad : i = 0, 1, \ldots, n-1$$

ومنه المساحة الكلية بطريقة المستطيلات تعطى بالقانون

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)\,dx \simeq h\left[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right]}$$

للحفظ

نلاحظ أنه كلما كانت n كبيرة كلما حصلنا على نتيجة أقرب للتكامل المطلوب.

لو طلبت القانون يساوي تكون مجموع المساحة

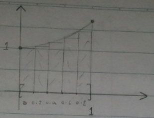
صار عندي n+1 مستطيل بإزاوجها $f(x_n)$ بالقانون

تمرين 1: باستخدام طريقة المستطيلات أوجد نتيجة تقريبية للتكامل

$$I = \int_0^1 e^{x^2} \cos(\ln(x+1))\,dx \quad \text{حيث} \quad n = 5$$

الحل: نلاحظ أن $n = 5 \Rightarrow h = 0.2$

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$f(x)$	1	1.0235	1.1077	1.2779	1.5781	2.091



عليه عشر علامات

3 علامات $I = \int_0^1 e^{x^2} \cos(\ln(x-1))\,dx \approx$ ومنه

$h[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)]$

الجواب النهائي

$= 0.2\,[1 + 1.0235 + 1.1077 + 1.2779 + 1.5781]$

5 علامات

$= 1.197\,uu$

تمرين 2: باستخدام طريقة المستطيلات أوجد قيمة تقريبية للتكامل $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ من أجل $n=5$

الحل: نلاحظ أن $n = 5$

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$F(x)$	1	0.8333	0.7142	0.625	0.5555	0.5

1 دوري هو $\frac{1}{9}$

2 دوري هو $\frac{2}{9}$

3 دوري هو $\frac{3}{9}$

4 دوري هو $\frac{4}{9}$

5 دوري هو $\frac{5}{9}$

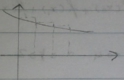
6 دوري $\frac{2}{3}$

$$\rightarrow I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \simeq h\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\right]$$

$$= 0.2\left[1 + 0.8333 + 0.7142 + 0.625 + 0.5555\right]$$

صار عندي زيادات

$$= 0.7456$$



القيمة الفعلية هي

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \left[\ln(x+1)\right]_0^1$$

$$= \ln 2 = 0.6931$$

الخطأ يكون [illegible]:

اعد التقريب من أجل $n = 10$

نلاحظ أن $n = 10 \rightarrow h = 0.1$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(x)$	1	0.909	0.833	0.7692	0.7142	0.666	0.625	0.5882	0.5555	0.5263	0.5

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \simeq h\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_9)\right]$$

$$= 0.1\left[1 + 0.909 + 0.833 + 0.7692 + 0.7142 + 0.6666 + 0.625 + 0.5882 + 0.5555 + 0.5263\right] = 0.7187$$

التاريخ: / /

الموضوع:

تمرين 3: باستخدام طريقة المستطيلات أوجد قيمة تقريبية للتكامل

$I = \int_3^4 \frac{\sin x}{e^x + 1}\,dx$ من أجل $n = 4$

$h = 0.25$

x	3	3.25	3.5	3.75	4
$F(x)$	0.0066	-0.004	-0.0102	-0.0131	
	بالربع الثاني موجب	بالربع الثالث اصبح سالب			

$$I = \int_3^4 \frac{\sin x}{e^x + 1}\,dx \simeq h\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right]$$

$$= 0.25\left[0.0066 - 0.004 - 0.0102 - 0.0131\right]$$

$$I \simeq -0.0051$$

وظيفة: $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{1 + x^4}\,dx$

من أجل $n = 4$ و $n = 8$