The norm $\|\cdot\|_{pq}$ is *induced* by the two norms $\|\cdot\|_p$ and $\|\cdot\|_q$. These norms satisfy the usual properties of norms; i.e.,

$$\|A\| \geq 0 \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times m} \quad \text{and} \quad \|A\| = 0 \quad \text{iff} \quad A = 0, \tag{1.8}$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times m}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \tag{1.9}$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times m}. \tag{1.10}$$

A norm that satisfies the above three properties is nothing but a *vector norm* applied to the matrix considered as a vector consisting of the m columns stacked into a vector of size nm.

The most important cases are again those associated with $p, q = 1, 2, \infty$. The case $q = p$ is of particular interest and the associated norm $\|\cdot\|_{pq}$ is simply denoted by $\|\cdot\|_p$ and called a *p-norm*. A fundamental property of a p-norm is that

$$\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p,$$

an immediate consequence of the definition (1.7). Matrix norms that satisfy the above property are sometimes called *consistent*. Often a norm satisfying the properties (1.8)–(1.10) that is consistent is called a *matrix norm*. A result of consistency is that, for any square matrix A,

$$\boxed{\|A^k\|_p \leq \|A\|_p^k.}$$

In particular the matrix A^k converges to zero if *any* of its p-norms is less than 1.

The Frobenius norm of a matrix is defined by

$$\|A\|_F = \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}. \tag{1.11}$$

This can be viewed as the 2-norm of the column (or row) vector in $\mathbb{C}^{n^2}$ consisting of all the columns (resp., rows) of A listed from 1 to m (resp., 1 to n). It can be shown that this norm is also consistent, in spite of the fact that it is not induced by a pair of vector norms; i.e., it is not derived from a formula of the form (1.7); see Exercise 5. However, it does not satisfy some of the other properties of the p-norms. For example, the Frobenius norm of the identity matrix is not equal to one. To avoid these difficulties, *we will only use the term matrix norm for a norm that is induced by two norms, as in the definition* (1.7). Thus, we will not consider the Frobenius norm to be a proper matrix norm, according to our conventions, even though it is consistent.

The following equalities satisfied by the matrix norms defined above lead to alternative definitions that are often easier to work with:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \tag{1.12}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|, \tag{1.13}$$

$$\|A\|_2 = \left[\rho(A^H A)\right]^{1/2} = \left[\rho(A A^H)\right]^{1/2}, \tag{1.14}$$

$$\|A\|_F = \left[\operatorname{tr}(A^H A)\right]^{1/2} = \left[\operatorname{tr}(A A^H)\right]^{1/2}. \tag{1.15}$$

1- $q_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$ $\quad r_{ij}$

$j=2 \to r$ 2- $\hat{q}_j = x_j - \sum_{i=1}^{j-1} (x_j, q_i) q_i$

3- $q_j = \frac{\hat{q}_j}{\|\hat{q}_j\|}$ $\quad r_{jj}$

Gram-Shmit

$d_2 = x_2 - (x_2, q_1) q_1 \Rightarrow q_2 = \frac{d_2}{\|d_2\|}$

$d_3 = x_3 - (x_3, q_1) q_1 \Rightarrow q_3 = \frac{d_3}{\|d_3\|}$

As will be shown later, the eigenvalues of $A^H A$ are nonnegative. Their square roots are called *singular values* of A and are denoted by $\sigma_i, i = 1, \ldots, m$. Thus, the relation (1.14) states that $\|A\|_2$ is equal to σ_1, the largest singular value of A.

Example 1.1. From the relation (1.14), it is clear that the spectral radius $\rho(A)$ is equal to the 2-norm of a matrix when the matrix is Hermitian. However, it is not a matrix norm in general. For example, the first property of norms is not satisfied, since, for

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

we have $\rho(A) = 0$ while $A \neq 0$. Also, the triangle inequality is not satisfied for the pair A and $B = A^T$, where A is defined above. Indeed,

$$\rho(A + B) = 1 \quad \text{while} \quad \rho(A) + \rho(B) = 0.$$

1.6 Subspaces, Range, and Kernel

A subspace of $\mathbb{C}^n$ is a subset of $\mathbb{C}^n$ that is also a complex vector space. The set of all linear combinations of a set of vectors $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$ of $\mathbb{C}^n$ is a vector subspace called the linear span of G:

$$\begin{aligned} \operatorname{span}\{G\} &= \operatorname{span}\{a_1, a_2, \ldots, a_q\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; z = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i a_i, \; \{\alpha_i\}_{i=1,\ldots,q} \in \mathbb{C}^q \right\}. \end{aligned}$$

If the a_i's are linearly independent, then each vector of span$\{G\}$ admits a unique expression as a linear combination of the a_i's. The set G is then called a *basis* of the subspace span$\{G\}$.

Given two vector subspaces S_1 and S_2, their *sum* S is a subspace defined as the set of all vectors that are equal to the sum of a vector of S_1 and a vector of S_2. The intersection of two subspaces is also a subspace. If the intersection of S_1 and S_2 is reduced to $\{0\}$, then the sum of S_1 and S_2 is called their direct sum and is denoted by $S = S_1 \bigoplus S_2$. When S is equal to $\mathbb{C}^n$, then every vector x of $\mathbb{C}^n$ can be written in a unique way as the sum of an element x_1 of S_1 and an element x_2 of S_2. The transformation P that maps x into x_1 is a linear transformation that is *idempotent*, i.e., such that $P^2 = P$. It is called a *projector* onto S_1 along S_2.

Two important subspaces that are associated with a matrix A of $\mathbb{C}^{n \times m}$ are its *range*, defined by

$$\operatorname{Ran}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{C}^m\}, \tag{1.16}$$

$\operatorname{ran}(A) = \{ z \in \mathbb{C}^n \;\; z = Av \}$

and its *kernel* or *null space*

$$\operatorname{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{C}^m \mid Ax = 0\}.$$

The range of A is clearly equal to the linear *span* of its columns. The *rank* of a matrix is equal to the dimension of the range of A, i.e., to the number of linearly independent columns. This *column rank* is equal to the *row rank*, the number of linearly independent

الترجمة

المحاضرة الرابعة:

الصفحة الثامنة:

إن النظيم $\|\cdot\|_{pq}$ مستخلص من النظيمين $\|\cdot\|_p$ و $\|\cdot\|_q$

إن هذه الأنظمة تحقق الخواص المعتادة للنظيم "توضيح":

$$\|A\| \geq 0 \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times m} \text{ and } \|A\| = 0 \quad \text{iff } A = 0 \tag{1.8}$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\| \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times m} \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \tag{1.9}$$

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times m} \tag{1.10}$$

النظيم الذي يحقق العلاقات الثلاث السابقة ليس بشيء ولكن النظيم الثاني المنطبق على مصفوفة معتبرة كشعاع المتضمنة m عمود تعامل كشعاع من القياس nm.

أهم الحالات تلك التي تربط بين p, q.

في الحالة التي يساوي فيها q و p هي حالة ذات اهتمام خاص والنظيم المرتبط $\|\cdot\|_{pq}$ يرمز بشكل بسيط بالشكل $\|\cdot\|_p$ ويعني النظيم p.

$$\|AB\|_p \leq \|A\|_p \, \|B\|_p$$

نتيجة مباشرة للتعريف (1.7)

نظيم المصفوفة التي تحقق الخاصية في الأعلى أحياناً تدعى ثوابت عالية. النظيم الذي يحقق الخواص (1.8) (1.10) والذي هو ثابت يدعى نظيم المصفوفة.

نتيجة التماسك هي من أجل أي مصفوفة مربعة A

$$\|A^k\|_p \leq \|A\|_p^k$$

في حالة خاصة: المصفوفة A^k تتلاشى مع الصفر إذا كان أحد p نظيم لها أصغر من 1

$$\|A\|_F = \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

إن هذا ممكن أن يظهر كنظيم 2 للشعاع العمودي أو الأفقي يتضمن كل الأعمدة أو الصفوف للمصفوفة A مرتبة من 1 إلى m أو من 1 إلى n

من الواضح أن هذا النظيم ثابت أيضاً.

من هنا نجد أن هذا لا ينتج من تعميم شعاعيين

توضيح أنه غير مشتق من الصيغة في (1.7)
على كل حال إنه لا تحقق بعض خواص الـ p - نظيم .
على سبيل المثال النظيم Frobenius للمصفوفة الواحدية لا يساوي الواحد
لتجنب هذه الصعوبات سنستخدم تعبير (نظيم مصفوفة) للنظيم
المستخلص من تعريف كما في التعريف (1.7) .
وهكذا لن نعتبر النظيم نظماً صحيحاً للمصفوفة
وبالاعتماد على التعريف المستخدم سابقاً حتى ولو كان ثابتاً ..
المساويات التالية التي تحققها نظيم المصفوفة المعرف في الأعلى تقود
الى تعاريف بديلة و التي غالباً ما يكون التعامل معها أسهل .

$$(1.12)\quad \|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$(1.13)\quad \|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$(1.14)\quad \|A\|_2 = \left[\rho(A^H A)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\rho(A A^H)\right]^{\frac{1}{2}}$$ غير مطلوب

$$(1.15)\quad \|A\|_F = \left[tr(A^H A)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[tr(A A^H)\right]^{\frac{1}{2}}$$

"الصفحة التاسعة !"

كما سيكون واضحاً لاحقاً، القيم الذاتية للمصفوفة $A^H A$ غير سالبة
جذورها التربيعية تدعى قيم شاذة لـ A ونرمز بالشكل :

$$\sigma_i ,\ i = 1, \dots m$$

وهكذا العلاقة (1.14) تعرض أن النظيم $\|A\|_2$ يساوي σ_1
أكبر قيمة شاذة للمصفوفة A
على سبيل المثال من العلاقة (1.14) يتضح أن نصف القطر الطيفي
$\rho(A)$ للمصفوفة إنه ليس نظيم للمصفوفة في الحالة العامة
مثلاً الخاصة الأولى من النظيم غير محققة

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

لدينا $\rho(A)=0$ بينما $A \neq 0$

أيضاً، متراجحة المثلثين تحققت من أجل المصفوفتين A ومنقول A^T حيث A معرفة في الأعلى.

في الحقيقة:

$$\rho(A+B) = 1 \quad \text{while} \quad \rho(A)+\rho(B)=0$$

1.6 الفضاءات الجزئية، المدى، النواة:

الفضاء الجزئي من الفضاء الشعاعي العقدي $\mathbb{C}^n$ هو مجموعة جزئية من $\mathbb{C}^n$ والتي هي عبارة عن فضاء شعاعي عقدي أيضاً.

إن مجموعة كل التراكيب الخطية لمجموعة من الأشعة في $\mathbb{C}^n$ ولتكن:

$$G = \{a_1, a_2, \dots a_q\}$$

تشكل فضاء شعاعي جزئي يدعى الفضاء الشعاعي المولد بـ G

$$\text{span}\{G\} = \text{span}\{a_1, a_2, \dots a_q\} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i a_i, \{\alpha_i\}_{i=1 \dots q} \in \mathbb{C}^q\}$$

إذا كانت العناصر a_i مستقلة خطياً فإن كل شعاع من المجموعة المولدة G يقابل بشكل وحيد للتراكيب الخطية بدلالة a_i عندها تدعى المجموعة G قاعدة للفضاء الجزئي المولد $\{G\}$

بعطى فضاءين شعاعيين S_1 و S_2

عندئذ مجموع هذين الفضاءين S هو فضاء شعاعي جزئي يعرف على أنه مجموعة كل الأشعة التي تكتب على شكل مجموع شعاعين الأول من الفضاء الأول S_1 والثاني من الفضاء الثاني S_2

إن تقاطع فضاءين شعاعيين جزئيين هو أيضاً فضاء شعاعي جزئي،

عندما يكون تقاطع الفضائين S_1, S_2 هو الفضاء الشعاعي الصفري عندئذ يكون مجموع هذين الشعاعين هو مجموعاً مباشراً ويعبر عنه بالشكل

$$S = S_1 \oplus S_2$$

إذا كان المجموع المباشر للفضاءين $\mathbb{C}^n$ عندها كل شعاع x من $\mathbb{C}^n$ يمكن كتابته على شكل مجموع شعاعين وبشكل وحيد بحيث الشعاع الأول x_1 من S_1 والثاني x_2 من S_2.
إن التحويل P الذي يربط كل عنصر x من $\mathbb{C}^n$ بعنصر x_1 من S_1 هو تحويل خطي يتمتع بخاصية اللامود
توضيح مثل $P^2 = P$
إنه يدعى إسقاط على S_1 باتجاه S_2
أهم فضاءين جزئيين لهما علاقة بالمصفوفة A من فضاء المصفوفات العقدية من المرتبة $m \times n$ هما مدى المصفوفة المعرف بالشكل

$$Ran(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{C}^m\}$$

ونواة أو الفضاء الفارغ.

$$Ker(A) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid Ax = 0\}$$

من الواضح أن مدى A يساوي المجموعة المولدة الخطية لأعمدة
مرتبة المصفوفة يساوي عدد أبعاد المدى.
توضيح يساوي عدد الأعمدة المستقلة خطياً.
رتبة الأعمدة المستقلة خطياً يساوي رتبة الصفوف المستقلة خطياً

انتهت المحاضرة الرابعة