

المحاضرة 11

طريقة كراونج في حالة عقد متساوية البعد فيما بينها:
 نفرض $y = f(x)$ تابع معرف عند نقاط x_0, x_1, \dots, x_n المرتبة تصاعدياً والمساوية البعد فيما بينها عند:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = h \quad : h > 0$$

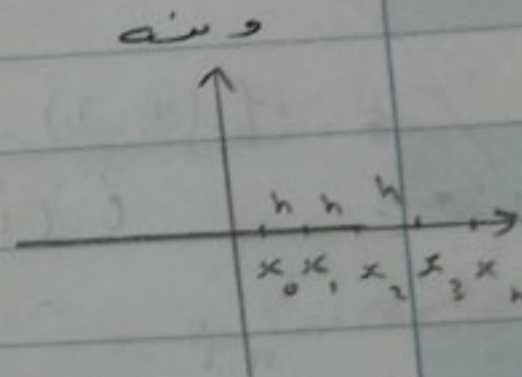
لا افتراض

$$x_1 = x_0 + 1h$$

$$x_2 = x_0 + 2h$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_0 + nh$$



البيانات بأعداد h

نحري كغير المتحول:

$$x = x_0 + th$$

$$t = \frac{x - x_0}{h}$$

فيكون

تلاحظ $(x - x_i) = (x_0 + th) - (x_0 + ih)$
 $= (t - i)h$

تلاحظ $(x_j - x_i) = (x_0 + jh) - (x_0 + ih)$
 $= (j - i)h$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)}$$

بإجراء القسمة:

$i=0$

$$L_i(t) = \frac{(t-h)(t-2h) \dots (t-(i+1)h)(t-(i-1)h) \dots (t-nh)}{(ih)(i-h) \dots 1h(-1)h(-2)h \dots (i-n)h}$$

بما أن كل t
 نجعل $t=ih$

$$= \frac{t(t-h) \dots (t-(i+1)h)(t-(i-1)h) \dots (t-nh)}{i(i-h) \dots 1(-1)(-2) \dots (-(n-i))}$$

بما أننا
 نجعل $t=ih$

$$= (-1)^{n-i} \frac{t(t-h) \dots (t-nh)}{(t-i)i!(n-i)!} \times \frac{n!}{n!}$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

توافق

$$= (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \frac{1}{t-i} \frac{t(t-h) \dots (t-nh)}{n!}$$

توافق

وهذه حدودية كعزائم الملائمة للتابع
 $y=f(x)$ كما يلي:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) y_i$$

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \frac{1}{t-i} \frac{t(t-h) \dots (t-nh)}{n!} y_i$$

بما أنه t

$$\Rightarrow \bar{P}_n(t) = \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \frac{y_i}{t-i}$$

للحذف

$$x = x_0 \Rightarrow t_0 = \frac{x_0 - x_0}{h} = 0 \Rightarrow \bar{P}_n(0) = y_0 \quad \text{ملاحظة (1)}$$

$$x = x_1 \Rightarrow t_1 = \frac{x_1 - x_0}{h} = \frac{h}{h} = 1 \Rightarrow \bar{P}_n(1) = y_1$$

$$x = x_2 \Rightarrow t_2 = \frac{x_2 - x_0}{h} = \frac{2h}{h} = 2 \Rightarrow \bar{P}_n(2) = y_2$$

$$\vdots$$

$$x = x_n \Rightarrow t_n = \frac{x_n - x_0}{h} = \frac{nh}{h} = n \Rightarrow \bar{P}_n(n) = y_n$$

ملاحظة (1):

يمكن $y = f(x)$ تابع معرف بالجدول

	0	1	2	3	4
x	1	3	5	7	9
$y = f(x)$	5	9	11	15	21

باستخدام طريقة لاغرانج حسب الجدول تقريبي

$f(2)$ ، $f(5.5)$ ، $f(8.2)$

الحل: نلاحظ أن نقاط الارتكاز متساوية التباعد
بينها حيث:

$$x_0 = 1, \quad h = 2, \quad n = 4$$

بجرى تغيير المتحول:

$$t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 1}{2}$$

$$x = 2 \Rightarrow t = 0.5 \Rightarrow f(2) \approx \bar{P}_4(0.5)$$

$$= \frac{(0.5)(-0.5)(-1.5)(-2.5)(-3.5)}{4!} \sum_{i=0}^4 (-1)^{4-i} \binom{4}{i} \frac{y_i}{0.5-i}$$

$$= (0.1367) [10 + 72 - 44 + 24 - 6]$$

$$\begin{aligned} & (-1)^3 \binom{4}{1} \frac{9}{0.5-1} \\ &= -1 \times 4 \times \frac{9}{-\frac{1}{2}} \\ &= 72 \end{aligned}$$

$$= 7.6552$$

هذه صيغة أويلر

أويلر 1 و 2

بيني 1 و 2

بين 2 و 3

بين 3 و 4

$$\begin{aligned} & (-1)^{4-3} \binom{4}{3} \frac{15}{0.5-3} \\ &= -1 \times 4 \times \frac{15}{2.5} \\ &= -24 \end{aligned}$$

من أجل $x = 5.5 \Leftrightarrow t = 2.25 \Leftrightarrow f(5.5) \approx \bar{P}_4(2.25)$

$$\bar{P}_4(2.25) = \frac{(2.25)(1.25)(0.25)(-0.75)(-1.75)}{4!} \sum_{i=0}^4 (-1)^{4-i} \binom{4}{i} \frac{y_i}{2.25-i}$$

$$= (0.0384) [2.2222 - 28.8 + 264 + 80 - 12]$$

$$= 11.7282$$

$$x = 8.2 \Rightarrow t = \frac{8.2 - 1}{2} = 3.6 \Rightarrow f(8.2) \approx \bar{P}_4(3.6) \text{ من أجل}$$

$$= \frac{3.6(2.6)(1.6)(0.6)(-0.4)}{4!} \sum_{i=0}^4 (-1)^{4-i} \binom{4}{i} \frac{y_i^0}{3.6-i}$$

$$= (0.1497) [1.3888 - 13.8461 + 41.25 - 100 - 52.5]$$

$$= 18.5189$$

تقریب (2) :

بفرض $y = f(x) = \cos x$ المعروف عند النقاط

0, 0.1, 0.2, 0.3

باستخدام طريقة لاغرانج اصابت كل تقریبی

$\cos(0.15)$, $\cos(0.22)$

الحل : نكتب جدول $y = f(x)$

x	0	0.1	0.2	0.3
y = f(x)	1	0.995	0.98	0.9553

تلاحظ أن نقاط الاستكمال متساوية البعد فيما بينها حيث
 $x_0 = 0, h = 0.1, n = 3$

$$\Rightarrow \bar{P}_n(t) = \frac{t(t-1) \dots (t-n)}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \frac{y_i}{t-i}$$

بفرضي تمثيل بالمعقول:

$$t = \frac{x - x_0}{h} = 10x$$

$$x_0 = 0.15 \Rightarrow t = 1.5 \Rightarrow \cos(0.15) \approx \bar{P}_3(1.5)$$

$$= \frac{(1.5)(0.5)(-0.5)(-1.5)}{3!} \sum_{i=0}^3 (-1)^{3-i} \binom{3}{i} \frac{y_i}{1.5-i}$$

$$= (0.0937) [-0.6666 + 5.97 + 5.88 - 0.6368]$$

$$= 0.9882$$

$$\cos(0.15) = 0.9887$$

كلمة ...

الخطية: أكد التمرين السابق من أجل

$$y = f(x) = e^x$$

عند تقاطع الاستكمال

$$-2, -1, 0, 1, 2$$

$$(-0.8), (1.5)$$

$$e, e$$

أضرب:

بشكل تقريبي