الأحد: 26/10/2014

المحاضرة الخامسة:

- التمثيل الوسيطي لمنحنى -

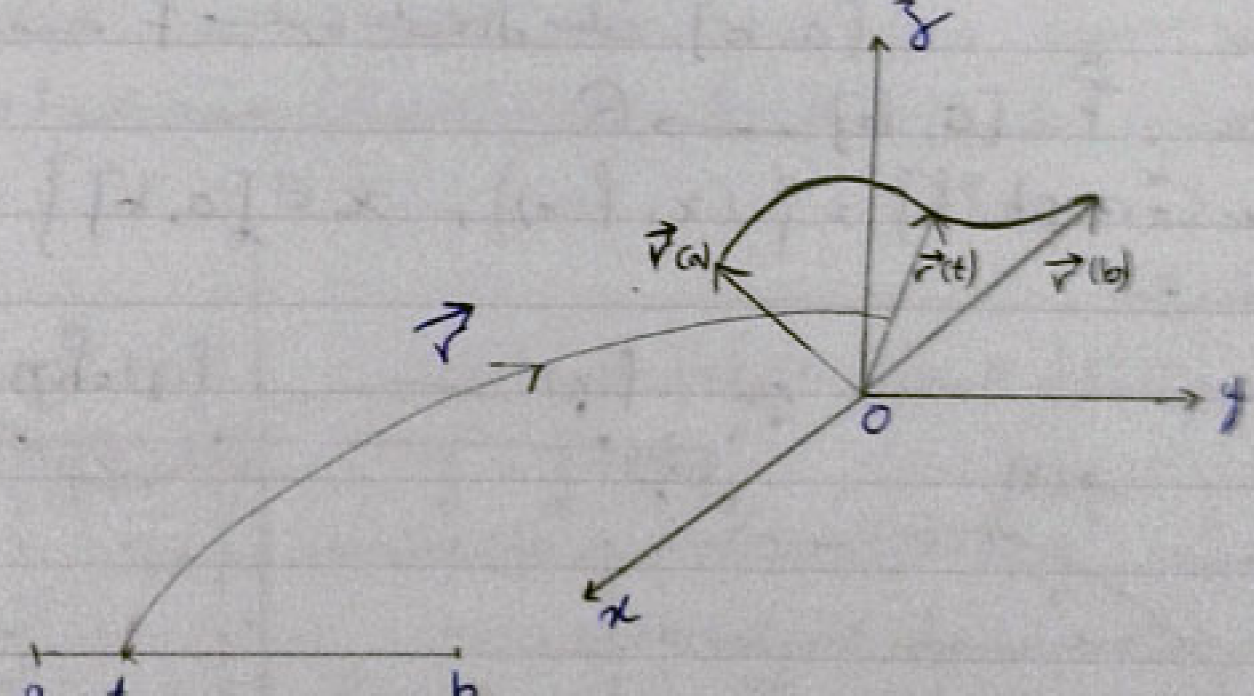
تعريف القوس البسيط:

نقول عن أية مجموعة من نقاط الفضاء إنها قوس بسيط إذا كانت متجهات مواضع نقاطها هي قيم لدالة متجهية القيمة، معرفة ومستمرة ومتباينة على مجال مغلق $[a,b]$: أي إذا وجدت الدالة:

$$\vec{r} : [a,b] \xrightarrow{\text{مستمرة}} \mathbb{R}^3$$ ← فضاء ثلاثي البعد

$$t \longrightarrow \vec{r}(t)$$

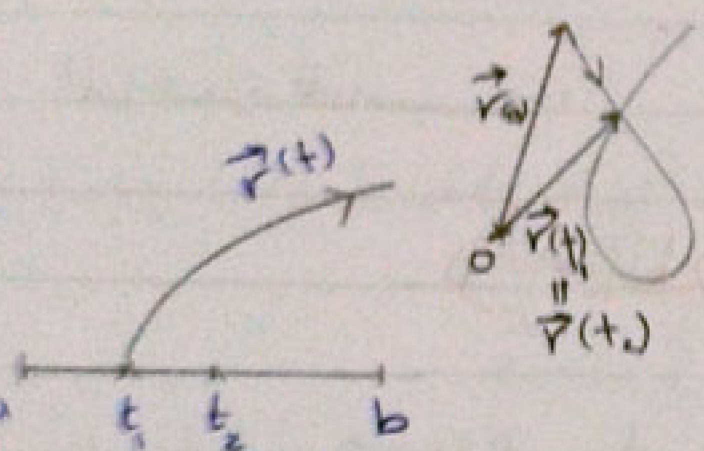
و $\vec{r}([a,b])$ مساوية لمجموعة متجهات الموضع لنقاط تلك المجموعة.



شرط التباين: أن لا أمر على النقطة أكثر من مرة.

مثال مجموعة نقطية وليست قوساً بسيطاً

لنفرض جدلاً وجود دالة متجهية القيمة ومتباينة فهذا يعني أننا نجمع نقاط المجال $[a, b]$ بشكل مستمر ونلاحظ لنا الانتقال لأن الدالة مستمرة ولكن عندها سنمر بنقطة $\vec{r}(t_1)$ الثانية مرة أي سيكون متجه موضع النقطة t_1 مساوٍ لقيمتين مختلفتين للدالة $\vec{r}$ وبالتالي $\vec{r}$ ليس متباين أي أن المجموعة النقطية ليست قوس بسيط



ملاحظة:

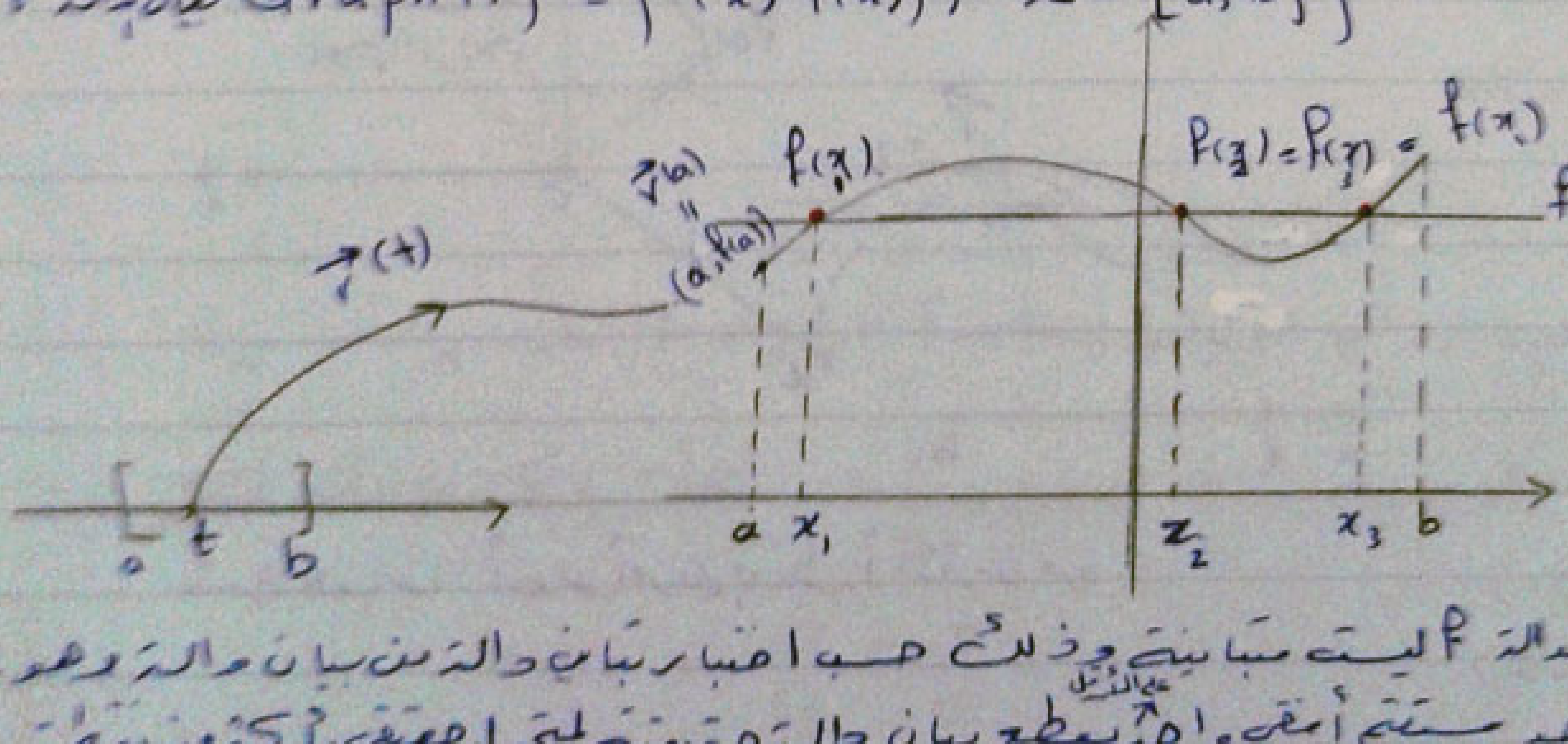
أي منحنى يقطع نفسه أو يمر ببعض نقاطه أكثر من مرة لا يكون قوساً بسيطاً

مثال عن قوس بسيط:

بيان دالة حقيقية f مستمرة على مجال مغلق $[a, b]$

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\text{Graph}\{f\} = \{(x, f(x)) \; ; \; x \in [a, b]\}$ بيان الدالة f



بيان الدالة f ليست متباينة وذلك حسب اختبار بيان دالة من بيان علاقة وهو [إذا وجد مستقيم أفقي واحد على الأقل يقطع بيان دالة حقيقية لمتحول حقيقي بأكثر من نقطة فإن هذه الدالة لن تكون متباينة]

لنعرف الدالة المتجهية

$$\vec{r}(t) = \overset{x(t)}{t}\,\vec{i} + \overset{y(t)}{f(t)}\,\vec{j} \quad ; \quad t \in [a,b]$$

وهي دالة مستمرة لأن كل من مركباتها دالة مستمرة . (حيث $x(t) = t$ مستمرة على R على المجال $[a,b]$

فهي مستمرة على $[a,b]$ و $y(t) = f(t)$ مستمرة على $[a,b]$ فرضاً)

$\Leftarrow$ المركبتين مستمرتين إذاً $\vec{r}(t)$ مستمرة (حسب مبرهنة)

- لنثبت أن الدالة $\vec{r}(t)$ متباينة:

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) \Rightarrow t_1\vec{i} + f(t_1)\vec{j} = t_2\vec{i} + f(t_2)\vec{j}$$

$$\Rightarrow t_1 = t_2$$

$\Rightarrow$ $\vec{r}$ متباينة.

$$\vec{r}([a,b]) = \{\vec{r}(t) \, ; \, t \in [a,b]\}$$
$$= \{(t, f(t)) \, ; \, t \in [a,b]\} = \text{Graph}\{f\}$$

مما سبق: حصلنا على دالة متجهية القيمة مستمرة ومتباينة على مجال مغلق ومجموع قيمها يساوي بيان الدالة f وهنا إثبات أن بيان الدالة f هو قوس بسيط.

مثال 2:

مجموعة نقاط الفضاء التي تحقق المعادلتين:

$$y = f(x) \, , \quad z = g(x)$$

حيث g , f معرفتان ومستمرتان على مجال مغلق $[a,b]$

هي قوس بسيط. لنثبت ذلك:

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j} + g(t)\vec{k} \quad ; \quad t \in [a,b]$$

① إن $\vec{r}(t)$ مستمرة لأن مركباتها مستمرة فرضاً.

② $\vec{r}(t)$ متباينة حسب الملاحظة التالية:

ملاحظة: (*)

إذا كانت إحدى مركبات دالة متجهية القيمة متباينة فإن الدالة متجهية القيمة تكون

متباينة ولكن العكس غير صحيح أي {قد يكون لدينا دالة متجهية القيمة متباينة ولكن جميع مركباتها ليست متباينة}

لنبرهن هذه الملاحظة:

نفرض أن إحدى هذه المركبات $\{y(t)\}$

$y(t)$ متباينة $\Longleftarrow$ الدالة $\vec{r}(t)$ متباينة:

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \\ z(t_1) = z(t_2) \end{cases}$$

من الفرض $y(t)$ متباينة ∴ ومنه $t_1 = t_2 \Longleftarrow \vec{r}(t)$ متباينة

- وبالتالي مركبة الأولى في هذا المثال متباينة فالدالة $\vec{r}(t)$ متباينة

③ إن A مجموعة نقاط الفضاء والتي تحقق المعادلتين:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; y = f(x) \; , \; z = g(x) \; ; \; x \in [a, b]\}$$

$$A = \vec{r}([a, b])$$

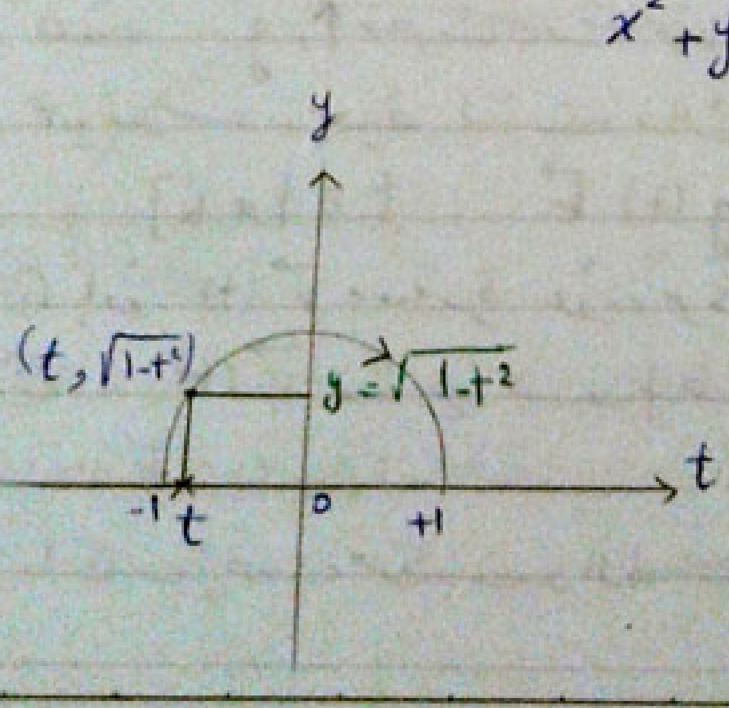
وبالتالي A يكون قوس بسيط حسب ① و ② و ③

مثال 3:

نصف دائرة الواحدة العلوي

$$x^2 + y^2 = 1 \quad ; \quad y \geq 0$$

هي قوس بسيط نثبت ذلك:



① الدالة متجهية القيمة

$$\vec{r}(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \quad ; \quad -1 \leq t \leq 1$$

مستمرة على $[-1, +1]$:

لأن t مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة عند $[-1, +1]$

و المركبة الثانية تكون مستمرة عندما $1-t^2 \geq 0$ وهذا محقق حيث $-1 \leq t \leq 1$

وبما أن المركبتين مستمرتين على $[-1,1]$ فالدالة $\vec{r}$ مستمرة على $[-1,1]$

② $\vec{r}(t)$ متباينة لتباين المركبة الأولى لها.

③ $\vec{r}([-1,1])$ مسارية لمجموعة متجهات الموضع لنقاط تلك المجموعة.

لأنه عندما تمسح t المجال $[-1,1]$ فالنقطة $(t, \sqrt{1-t^2})$ تمسح نصف الدائرة العلوي وبالتالي القوس الممثل لنصف الدائرة العلوي الممسوح مرة واحدة يمثل قوس بسيط حسب

① و ② و ③

ملاحظة :

كل دالة مطردة تماماً (متزايدة تماماً - متناقصة تماماً) على مجال تكون متباينة عليه إلا أن العكس غير صحيح.

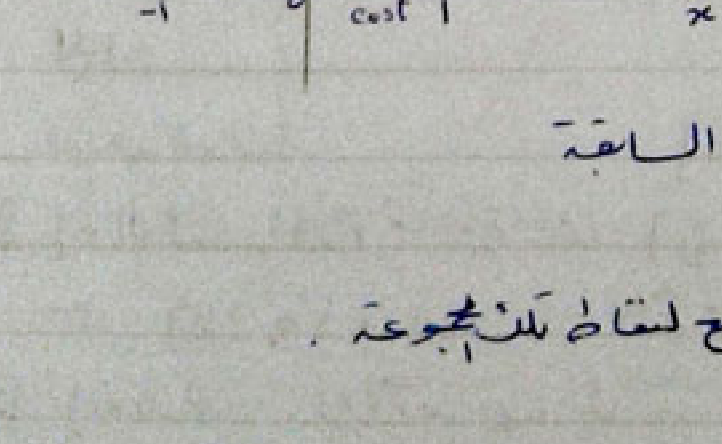
مثال :

المجموعة النقطية

$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$; $t \in [0,\pi]$ تمثل قوس بسيط لأن :

① المركبتان مستمرتان على $\mathbb{R}$ فهما مستمرتان على $[0,\pi]$ وبالتالي الدالة $\vec{r}(t)$ مستمرة على $[0,\pi]$

②



$x = \cos t \Rightarrow x' = (\cos t)' = -\sin t < 0$, $t \in]0,1[$

$\Leftarrow$ x متناقصة تماماً على $[0,\pi]$

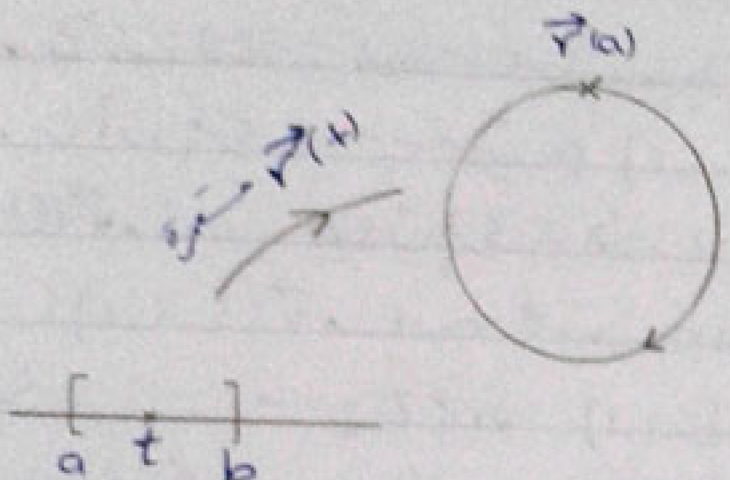
$\Leftarrow$ x متباينة على $[0,\pi]$ حسب الملاحظة السابقة

$\Leftarrow$ $\vec{r}$ متباينة على $[0,\pi]$

③ $\vec{r}([0,\pi])$ مسارية لمجموعة متجهات الموضع لنقاط تلك المجموعة.

وبالتالي القوس يمثل قوس بسيط.

- الدائرة بأكملها ليست قوساً بسيطاً:



نفرض أن $\vec r(t)$ مستمرة أي تمسح نقاط
الدائرة بأكملها من نقطة البداية إلى نقطة
النهاية دون قفز فيكون

$$\vec r(a) = \vec r(b)$$

وهذا يعني أن $\vec r$ ليست متباينة
وبالتالي لا توجد دالة متجهية القيمة مستمرة ومتباينة ومجموعة نقاطها مساوية
للدائرة الممسوحة مرة واحدة. فالدائرة ليست قوساً بسيطاً

ملاحظة:

الدائرة ما عدا نقطة ليست قوساً بسيطاً لأن أطراف القوس البسيط يجب أن تكون منتمية
للمنحني

{ إذا لم ينتمِ طرف منحنٍ لذلك المنحني فلن يكون المنحني قوساً بسيطاً }

تمرين:

أثبت أن ثلاثة أرباع دائرة الواحدة الموجودة في الربع الأول والثاني والثالث الممسوحة مرة واحدة
بالاتجاه الموجب انطلاقاً من $(1,0)$ إلى $(0,-1)$ هي قوس بسيط؛
وأثبت أن هذا المثال يبين أن عكس الملاحظة السابقة (*) غير صحيح أي أن { الدالة
متجهية القيمة متباينة ولكن جميع مركباتها ليست متباينة }

الحل:

لنأخذ الدالة: $\vec r(t) = \cos t\,\vec i + \sin t\,\vec j \;;\; t \in [0, \frac{3\pi}{2}]$

1 إن الدالة $\vec r(t)$ مستمرة على $[0, \frac{3\pi}{2}]$ لأن كلاً من مركباتها مستمر على R وبالتالي مستمر
على $[0, \frac{3\pi}{2}]$ فالدالة $\vec r(t)$ مستمرة على $[0, \frac{3\pi}{2}]$

2 إن الدالة $\vec r(t)$ متباينة لأنه: ليكن $t_1, t_2 \in [0, \frac{3\pi}{2}]$

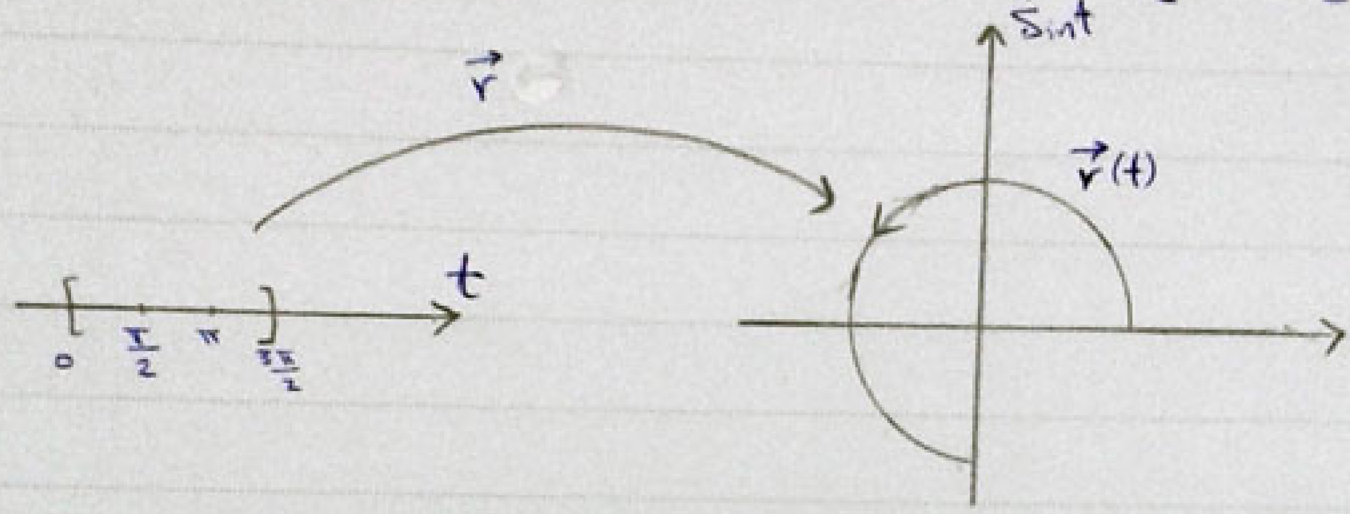
$$\vec r(t_1) = \vec r(t_2) \begin{cases} \Rightarrow \cos t_1 = \cos t_2 \Rightarrow t_1 = t_2 + 2\pi k \;,\; t_1 = -t_2 + 2\pi k \\ \Rightarrow \sin t_1 = \sin t_2 \Rightarrow t_1 = t_2 + 2\pi k ,\; t_1 = (\pi - t_2) + 2\pi k \end{cases}$$

من المعادلات السابقة نجد:

$$t_1 = t_2 + 2\pi k$$

وبما أن $t_1, t_2 \in [0, \frac{3\pi}{2}[$ فلا يمكن أن تتحقق المساواة السابقة إلا إذا كانت $k=0$

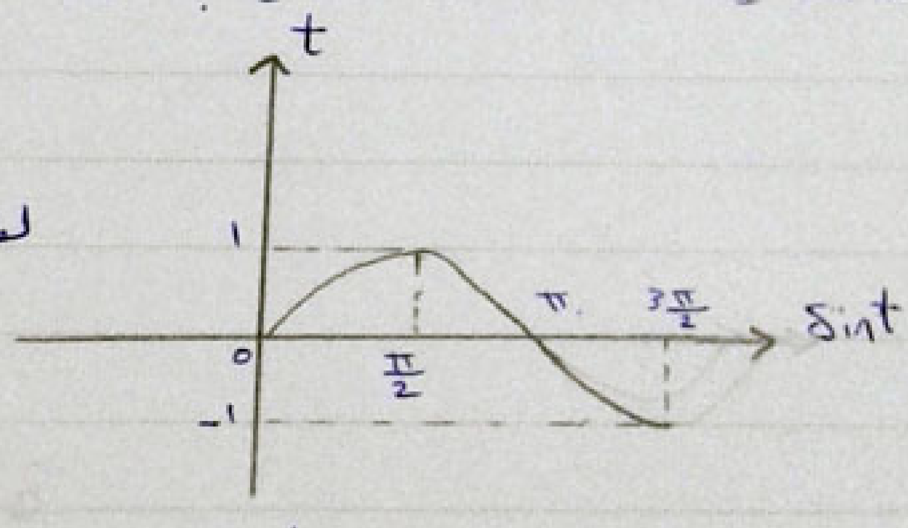
وبالتالي $t_1 = t_2$ ومنه الدالة $\vec{r}(t)$ متباينة.



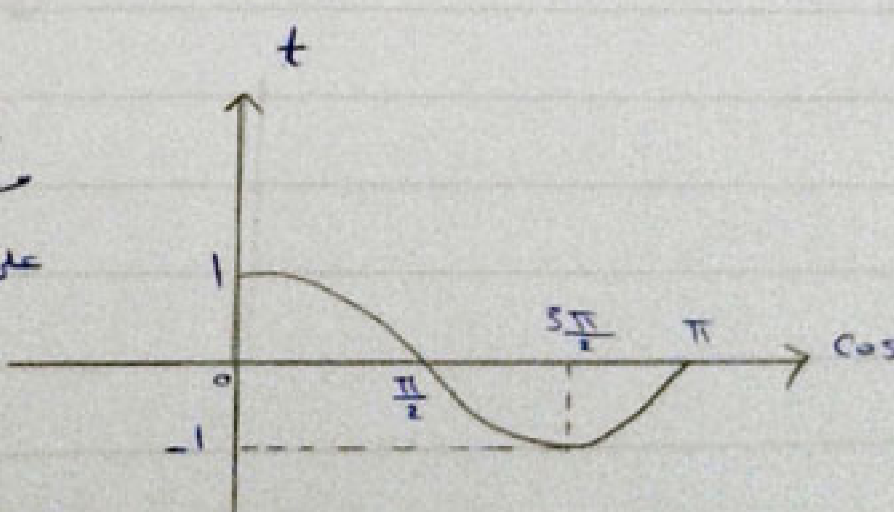
- إثبات أن عكس الملاحظة غير صحيح

إن الدالتين $\sin t, \cos t$ غير متباينتين على المجال $[0, \frac{3\pi}{2}[$ لأن:

واضح من الرسم أن هذه الدالة $(\sin t)$ غير متباينة لوجود مستقيم أفقي واحد على الأقل يقطع البيان بأكثر من نقطة (أي حسب اختبار تباين دالة من بيان دالة)



وأيضاً واضح من الرسم أن الدالة $\cos t$ غير متباينة على هذا المجال لوجود مستقيم أفقي واحد على الأقل يقطع البيان بأكثر من نقطة.



3] $\vec{r}([0, \frac{3\pi}{2}[)$ مسار مجموعة متجهات الموضع لنقاط تلك المجموعة.

وبالتالي من 1] و 2] و 3] نجد أن ثلاثة أرباع الدائرة الممسوحة مرة واحدة تمثل قوس بسيط