المحاضرة السابعة — الأحد 19/10/2014

سقاع التسارع:

باستثقاف سقاع السرعة بالنسبة للزمن نجد:

$$\vec{\Gamma}(M) = b\vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} - \omega^2 \vec{mM}$$

حيث m مسقط M على محور الدوران

$\vec{\Omega}$ سقاع الدوران

$\vec{\varepsilon}$ سقاع التسارع الزاوي

O نقطة ثابتة من الفراغ

b الخطوة المختزلة للولب.

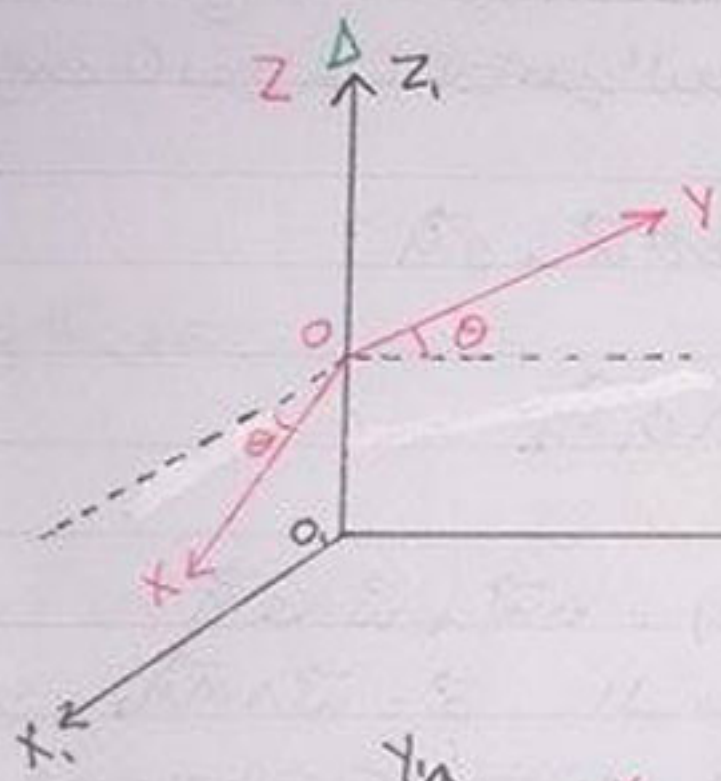
الدراسة التحليلية:

نختار جملتين من المحاور ثابتة

$O_1X_1Y_1Z_1$ بحيث O_1Z_1 منطبق على محور الدوران Δ و مقاسكة مع الجسم

$OXYZ$ بحيث OZ منطبق على محور الدوران Δ

θ زاوية الدوران بين منحى O_1X_1 و OX

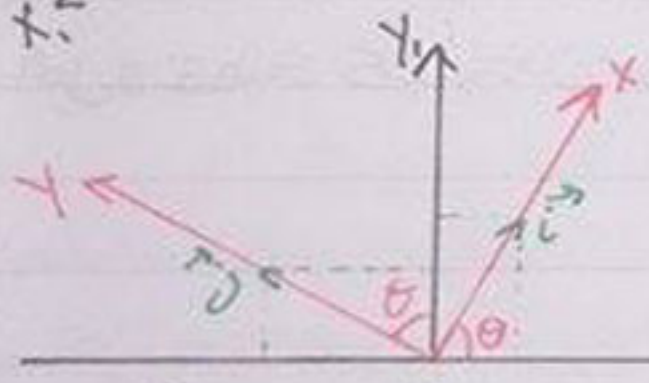


الدراسة التحليلية لسقاع التوضع:

$$\vec{O_1M} = \vec{O_1O} + \vec{OM}$$

$$\vec{O_1M} = b\vec{k} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{O_1M} = x\vec{i} + y\vec{j} + (z + b\theta)\vec{k}$$



من الرسم نجد:

$$\vec{i} = \cos\theta\,\vec{i_1} + \sin\theta\,\vec{j_1}$$

$$\vec{j} = -\sin\theta\,\vec{i_1} + \cos\theta\,\vec{j_1}$$

$$\vec{k} = \vec{k_1}$$

وبالتعويض نجد:

$$\vec{O_1M} = x(\cos\theta\,\vec{i_1} + \sin\theta\,\vec{j_1}) + y(-\sin\theta\,\vec{i_1} + \cos\theta\,\vec{j_1}) + (z + b\theta)\vec{k_1}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y_1 &= x\sin\theta + y\cos\theta \\ z_1 &= z + b\theta \end{aligned}\right\} (*)$$

مركبات $\vec{O_1M}$ على الجملة الثابتة

الدراسة التحليلية لمتاع السرعة:

$$\vec{v}(M) = b\theta'\vec{k} + \vec{\omega}\wedge\vec{OM}$$

بالاسقاط على الجملة المتعامدة:

$$\vec{v}(M) = b\theta'\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}(M) = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j} + b\theta'\vec{k}$$

على الجملة الثابتة:

$$\vec{v}(M) = b\theta'\vec{k}_1 + \vec{\omega}\wedge\vec{O_1M}$$

$$\vec{v}(M) = b\theta'\vec{k}_1 + \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}(M) = -\omega y_1\vec{i}_1 + \omega x_1\vec{j}_1 + b\theta'\vec{k}_1$$

حيث x_1, y_1, z_1 الموجودين في العلاقة (*)

الدراسة التحليلية لمتاع التسارع:

$$\vec{\Gamma}(M) = b\theta''\vec{k} + \vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM} + \vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)$$

على المتعامدة:

$$\vec{\Gamma}(M) = b\theta''\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y & \omega x & b\theta' \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = (-\varepsilon y - \omega^2 x)\vec{i} + (\varepsilon x - \omega^2 y)\vec{j} + b\varepsilon\vec{k}$$ «على المتعامدة»

$$\vec{\Gamma}(M) = (-\varepsilon y_1 - \omega^2 x_1)\vec{i}_1 + (\varepsilon x_1 - \omega^2 y_1)\vec{j}_1 + b\varepsilon\vec{k}_1$$ «على الثابتة»

مسألة:

اسطوانة دائرية تتحرك بحركة لولبية حول محور ثابت حيث محور الاسطوانة منطبق على محور الدوران

المطلوب: تعيين سرعة وتسارع نقطة من سطح الاسطوانة بفرض أن الحظوة المختزلة للولب $b = 2$ ومعادلة حركتها $\theta = 2t^2$

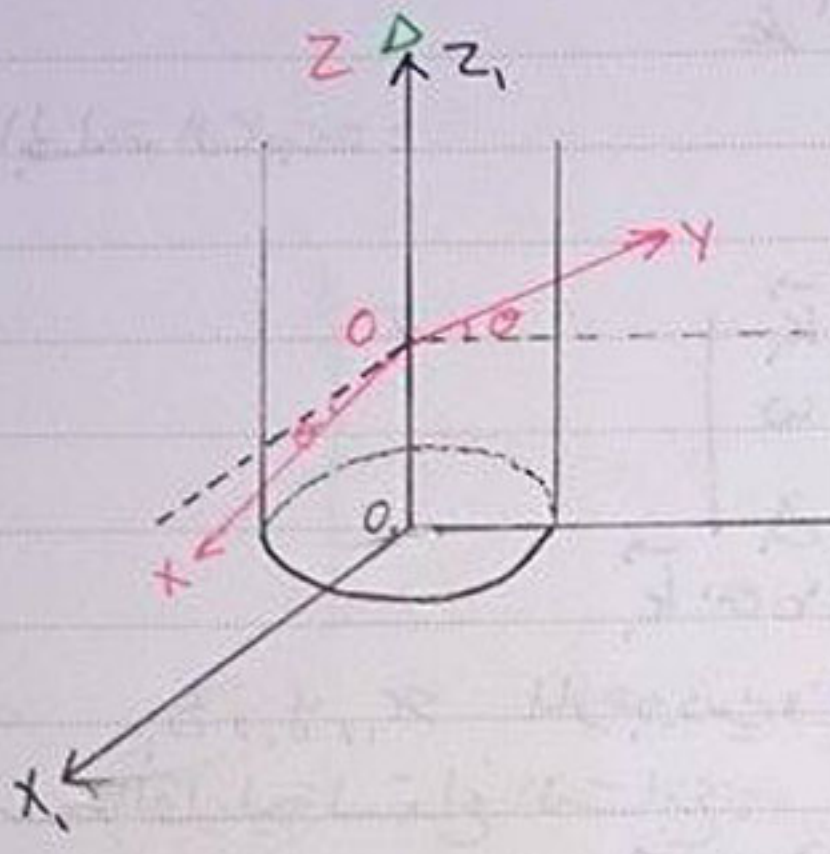
الحل: نختار جملتين من المحاور: ثابتة $O_1X_1Y_1Z_1$ مماسكة مع الجسم $OXYZ$ حيث OZ منطبقة على Δ «محور الدوران» وكذلك OZ منطبقة Δ

نختار M واقعة على المحور OX أي $M(x,0,0)$

لحساب «ω و ε» :

$$\omega = \theta' = 4t$$

$$\varepsilon = \theta'' = 4 = \omega'$$



شعاع الموضع:

المماسكة:

$$\overrightarrow{OM} = 4t^2\vec{k} + x\vec{i}$$

الثابتة:

$$\overrightarrow{O_1M} = x\cos\theta\,\vec{i}_1 + x\sin\theta\,\vec{j}_1 + 4t^2\vec{k}_1$$

$$\overrightarrow{O_1M} = x\cos 2t^2\,\vec{i}_1 + x\sin 2t^2\,\vec{j}_1 + 4t^2\vec{k}_1$$

شعاع السرعة: على الثابتة:

$$\vec{v}(M) = -4tx\sin 2t^2\,\vec{i}_1 + 4tx\cos 2t^2\,\vec{j}_1 + 2t\vec{k}_1$$

شعاع التسارع: على الثابتة:

$$\vec{\gamma}(M) = (-4tx\sin 2t^2 - 16t^2x\cos 2t^2)\vec{i}_1 + (4x\cos 2t^2 - 16t^2x\sin 2t^2)\vec{j}_1 + 8\vec{k}_1$$

انتهت المحاضرة