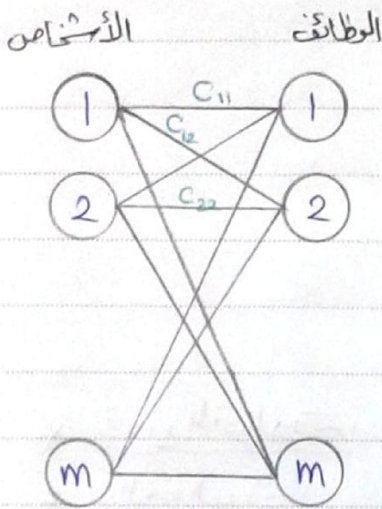


مسألة الإسناد:

تهدف هذه المسألة لتحقيق أقل تكلفة، وذلك لإسناد الأعمال بحيث لدينا  $m$  شخص و  $m$  وظيفة.

ليكن  $C_{ij}$  تكلفة عمل الشخص  $i$  الوظيفة  $j$ .



شروط المسألة:

- \* الوظائف يجب أن تُخزن
- \* الوظيفة يجب أن تُخزن من قبل شخص واحد فقط
- والشخص يقوم بوظيفة واحدة فقط
- وهذا الشرط قد يتغير بحسب المطلوب في المسألة.

\* كتابة النموذج الرياضي لمسألة الإسناد:

\* تديد متحولات المسألة:

$$x_{ij} = \{0, 1\}$$

إذا قام الشخص  $i$  بالوظيفة  $j$  }  $x_{ij} = 1$   
 إذا لم يقم الشخص  $i$  بالوظيفة  $j$  }  $x_{ij} = 0$

\* تديد دالة الهدف:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m C_{ij} x_{ij} \longrightarrow \text{Min}$$

\* شروط المسألة:

أ- شروط الأشخاص: شرط الشخص  $i$ :

$$x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{im} = 1 \quad ; \quad i = 1, \dots, m$$

ب- شروط الوظائف: شرط الوظيفة  $j$ :

$$x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} = 1 \quad ; \quad j = 1, \dots, m$$

وهكذا يصبح النموذج الرياضي لسألة الإِسناد :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m C_{ij} x_{ij} \rightarrow \text{Min}$$

$$x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{im} = 1 \quad ; \quad i=1, \dots, m$$

$$x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} = 1 \quad ; \quad j=1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

### حالات خاصة :

① في حال كان عدد الأشخاص  $m$  أكبر من عدد الوظائف  $n$  ، عندئذٍ يصبح شرط الأشخاص من الشكل :

$$x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} \leq 1 \quad ; \quad i=1, \dots, m$$

② في حال الوظيفة  $k$  يجب أن تنجز من قبل  $l$  شخص ، عندئذٍ يصبح شرط الوظيفة  $k$  :

$$x_{1k} + x_{2k} + \dots + x_{mk} = l$$

- الوظيفة  $k$  يجب أن تنجز من قبل  $l$  شخص على الأقل  $\Leftarrow$  يصبح الشرط السابق  $(\geq)$

- الوظيفة  $k$  يجب أن تنجز من قبل  $l$  شخص على الأكثر  $\Leftarrow$  يصبح الشرط السابق  $(\leq)$

### طريقة هشارين لحل مسائل الإِسناد :

إن هذه الطريقة هي طريقة بيانية ، وتقوم بحل المسألة من أجل : عدد الأشخاص = عدد الوظائف  
وفي حال كان عدد الأشخاص أكبر من عدد الوظائف نقوم بإضافة وظائف وهمية بكلفة معدومة

\* خطوات الحل بطريقة هشارين :

① نوجد أصغر عدد من كل سطر ونظيره من باقي أعداد السطر

② نوجد أصغر عدد من كل عمود ونظيره من باقي أعداد العمود

③ نغطي الأصفار في الأسطر والأعمدة بأصغر عدد من الخطوط (سطرية أو عمودية)

④ إذا كانت عدد هذه الخطوط يساوي عدد الأشخاص نتوقف والحل هو الحل الأمثل ، وإلا نكمل

⑤ فنأثر أصغر عدد غير مغطى بالخطوط ، ونظيره من باقي الأعداد غير المغطاة ، ونجسده إلى

الأعداد المغطاة بظليل ثم نعود للخطوة ④

- إن الحل الأمثل يوافق الأصفار الموجودة في الجدول الأخير

**مثال:** ترغب إحدى الشركات في تعيين عمال في فطر سير الإنتاج (مراقبة الجودة، تجريب، تغليف). وبعد إجراء السابقة نرى أربعة أشخاص، حيث كانت علاماتهم لأجل كل من هذه الأعمال مطاوع بالجدول التالي:

العمل / الأشخاص	مراقبة	تجريب	تغليف
الشخص الأول	11	11	14
الشخص الثاني	13	14	17
الشخص الثالث	12	12	16
الشخص الرابع	12	11	15

أوجد أقل تكلفة لإسناد هذه الوظائف لثلاثة فقط من أولئك الأشخاص مع هتقارين.

الحل:

بما أن عدد الوظائف أقل من عدد الأشخاص، نقوم بإضافة وظيفة وهمية بتكلفة صفرية

	مراقبة	تجريب	تغليف	وظيفة وهمية
الشخص 1	11	11	14	0
الشخص 2	13	14	17	0
الشخص 3	12	12	16	0
الشخص 4	12	11	15	0

- بإيجاز الخطوة الأولى فضل على الجدول السابق

- بإيجاز الخطوة الثانية فضل على الجدول التالي:

	وظيفة 1	وظيفة 2	وظيفة 3	وظيفة 4
الشخص 1	<del>0</del>	<del>0</del>	<del>0</del>	<del>0</del>
الشخص 2	2	3	3	0
الشخص 3	1	1	2	0
الشخص 4	<del>1</del>	<del>0</del>	<del>1</del>	<del>0</del>

- بإيجاز الخطوة الثالثة نحل على الخطوط الموضحة على الجدول السابق .

$$3 = \text{عدد الخطوط} \neq \text{عدد الأشخاص} = 4$$

← مع الخطوة الرابعة فالحل ليس أمثل بعد ، إذن نتابع .

- بإيجاز الخطوة الخامسة نحل على الجدول :

	وظيفة 1	وظيفة 2	وظيفة 3	وظيفة 4
الشخص 1	<del>0</del>	<del>0</del>	<del>0</del>	<del>1</del>
الشخص 2	1	2	2	0
الشخص 3	<del>0</del>	<del>0</del>	<del>1</del>	<del>0</del>
الشخص 4	<del>1</del>	<del>0</del>	<del>1</del>	<del>1</del>

- إن أقل عدد من الخطوط التي تغطي الأصفار موضحة على الجدول السابق

$$4 = \text{عدد الخطوط} = \text{عدد الأشخاص} = 4 \leftarrow \text{الحل أمثل وهو التالي :$$

الشخص الأول يقوم بالوظيفة 1 و 2 و 3

الشخص الثاني يقوم بالوظيفة 4

الشخص الثالث يقوم بالوظيفة 1 و 2 و 4

الشخص الرابع يقوم بالوظيفة 2

بتل منطقي نبدأ أن الحل الأمثل الفعلي : الشخص الأول يقوم بالعمل الثالث (التلخيص)

الشخص الثاني يقوم بالعمل الرابع (لا يقوم بأي عمل)

الشخص الثالث يقوم بالعمل الأول (المراقبة)

الشخص الرابع يقوم بالعمل الثاني (التجريب)

$$* \text{ من الجدول الأول نبدأ أن : الكلفة الكلية} = 14 + 0 + 12 + 11 = 37$$