Subject

Date 2014/11/10   13   المحاضرة

نعلم سابقاً أن: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

- لنضع المتسلسلة $\sum \frac{f(n)}{g(n)}$ حيث درجة البسط n ودرجة المقام m
تكون المتسلسلة متقاربة إذا كان $n+1 < m$

⊗ متسلسلات الأجزاء الحقيقية والتخيلية لمتسلسلة عقدية:

نفرض $\sum z_n$ متسلسلة عقدية حيث $z_n = x_n + i y_n$
عندئذٍ ندعو $\sum x_n$ متسلسلة الأجزاء الحقيقية
و $\sum y_n$ متسلسلة الأجزاء التخيلية

⊗ **مبرهنة:** تكون المتسلسلة $\sum z_n = \sum (x_n + i y_n)$ إذا وفقط إذا
كانت متسلسلة الأجزاء الحقيقية والتخيلية متقاربتان
بمعنى آخر إذا كان $S = A + iB$ عندئذ

$$\sum z_n = S \iff \sum x_n = A \wedge \sum y_n = B$$

الإثبات: لدينا

$$S_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n$$
$$= (x_0 + i y_0) + (x_1 + i y_1) + \cdots + (x_n + i y_n)$$
$$= (x_0 + x_1 + \cdots + x_n) + i(y_0 + y_1 + \cdots + y_n)$$
$$= A_n + i B_n$$

وبالتالي تكون المتتالية $\{S_n\}$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت المتتاليتان $\{A_n\}$، $\{B_n\}$
متقاربتان ومنه

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} A_n + i \lim_{n\to\infty} B_n = A + iB$$

⊗ **تمرين:** ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات التالية:

I $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n^3+n+1} + i \frac{1}{n^2+1} \right)$

نلاحظ أن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ متقاربة (تفحص بالامتحان)،

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+n+1}$ متقاربة لأن   درجة البسط 1

ودرجة المقام 3) $(1+1<3)$ ⟸ متقاربة ⟸ المتسلسلة الأساسية متقاربة

2] $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n^3+n+1} + i\frac{1}{n^2+1}\right)$

نلاحظ أن $\sum \frac{n^2}{n^3+n+1}$ متباعدة ومنه المتسلسلة المعطاة متباعدة.

3] $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + i\,3\left(\frac{2^n}{n!}\right)\right)$

نلاحظ أن: $x_n = \sum \frac{1}{2^n} = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$

متسلسلة هندسية $a=\frac{1}{2}$ ، $b=1$ $\Leftarrow$ $|a|=\frac{1}{2}<1$

هندسية متقاربة ومجموعها هو $A=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{1}=2$

$\sum 3\left(\frac{2^n}{n!}\right) = 3\sum \frac{2^n}{n!}$

متقاربة ومجموعها $B=3e^2$ لأن:

$e = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots$

$e^x = \frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

وبأخذ $x=2$ فينتج نفس حدود المتسلسلة للأجزاء التخيلية

ومنه المتسلسلة المعطاة متقاربة ومجموعها $2+3e^2$

مبرهنة: نفرض $\sum z_n$ ، $\sum w_n$ متسلسلتان عقديتان متقاربتان ومجموعها S, T على الترتيب عندئذ تكون متسلسلة المجموع $\sum(z_n+w_n)$ متقاربة ومجموعها $S+T$

ملاحظة: مجموع متسلسلتين متباعدتين ليس بالضرورة متباعدة.

مثال: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$

مبرهنة (بدون اثبات): نفرض $\sum z_n$ متسلسلة عقدية متقاربة ومجموعها S

ونفرض λ ثابت عقدي

فإن $\sum \lambda z_n$ متقاربة ومجموعها $\lambda \cdot S$

⊛ التقارب بالاطلاق للمتسلسلات العقدية:

نقول عن المتسلسلة $\sum z_n$ أنها متقاربة بالاطلاق إذا وفقط إذا كانت $\sum |z_n|$ متقاربة.

مبرهنة: كل متسلسلة متقاربة بالاطلاق تكون متقاربة:

الاثبات: نفرض $\sum z_n$ متسلسلة متقاربة بالاطلاق عندئذ:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) > 0 : \forall n, m > n(\varepsilon) \ , \ m < n : \left| |z_m| + \cdots + |z_n| \right| < \varepsilon$$

ولدينا $|z_m + \cdots + z_n| \leqslant |z_m| + \cdots + |z_n|$ لحسب متراجحة المثلث

ومنه $|z_m + \cdots + z_n| < \varepsilon$

ملاحظة: إن عكس هذه المبرهنة غير صحيح بالضرورة فمثلاً: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة إلا أن $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة.

اختبارات التقارب للمتسلسلات العقدية.

Ⅰ اختبار المقارنة: نفرض $\sum z_n$ متسلسلة عقدية و $\sum \alpha_n$ متسلسلة حقيقية موجبة عندئذ:

إذا كانت $\sum \alpha_n$ متقاربة وتحقق:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0 : |z_n| \leqslant \alpha_n$$

عندئذ $\sum |z_n|$ متقاربة

وإذا كانت $\sum \alpha_n$ متباعدة وتحقق:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0 : |z_n| \geqslant \alpha_n$$

عندئذ $\sum z_n$ متباعدة

II) اختبار دالامبير:

نفرض $\sum z_n$ متسلسلة عقدية ولنضع $P=\lim\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$

إذا كان: $P<1$ فالمتسلسلة $\sum|z_n|$ متقاربة

$P>1$ فالمتسلسلة $\sum z_n$ متباعدة

$P=1$ يفشل الاختبار

III) اختبار لايبنتز:

نفرض $\sum(-1)^n x_n$ متسلسلة عقدية تحقق:

① $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

② $\exists\, n_0\in\mathbb{N};\ \forall n\geq n_0:\ x_{n+1}<x_n$

عندئذ $\sum(-1)^n x_n$ متقاربة

IV) اختبار كوشي:

نفرض $\sum z_n$ متسلسلة عقدية ولنضع $P=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}$

إذا كان $P<1$ فالمتسلسلة $\sum|z_n|$ متقاربة

$P>1$ فالمتسلسلة $\sum z_n$ متباعدة

$P=1$ يفشل الاختبار

تمرين: ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات التالية:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

نلاحظ أن $\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

كذلك $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ \frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$

وبالتالي تكون المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة حسب لايبنتز.

2 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \frac{1}{6} - \frac{i}{7} + \frac{1}{8} + \frac{i}{9} + \cdots$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots\right) + i\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

(تدرس كل متسلسلة على حدى حسب اختبار لايبنتز) ومنه المتسلسلة متقاربة.

3 $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,\alpha^n} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$\left\{\sqrt[n]{n!} = \infty\right.$

وفي نهاية التمرين لنفرض $\alpha = 3+4i$

$$P = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,\alpha^{n+1}} \frac{n!\,\alpha^n}{n^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\cancel{(n+1)}(n+1)^n}{\cancel{(n+1)}\,(n!)\,\alpha^n \cdot \alpha} \frac{n!\,\alpha^n}{n^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{1}{\alpha}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{\alpha}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{\alpha}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{|\alpha|}$$

$$= \frac{1}{|\alpha|} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{|\alpha|}\, e$$ (تدرس $\frac{e}{|\alpha|}$ حسب دالامبير)

$|\alpha| = 5 \Leftarrow \alpha = 3+4i$ نفرض

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,(3+4i)^n} = \frac{e}{5} < 1 \Longrightarrow$$ متقاربة حسب دالامبير

4 $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(1+i)^n}{2^n}$$

$$P = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n\,|1+i|^n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}\,\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

فالمتسلسلة متقاربة حسب كوشي

5 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\sqrt{3}i)^n}{n}$$

$$|z_n| = \frac{|1+\sqrt{3}i|^n}{|n|} = \frac{2^n}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \frac{2^n}{n} \underset{\text{نطبق أوبيتال}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \ln(2)}{1} = \lim_{n\to\infty} (2^n \ln(2)) = \infty$$

والمتسلسلة متباعدة

6] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\sqrt{3}\,i)^n}{5^{\frac{n}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{\sqrt{5}}\right)^n$

متسلسلة هندسية حدها الأول $b = 1$ وأساسها $a = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{\sqrt{5}}$

$\Longrightarrow |a| = \frac{|1+\sqrt{3}\,i|}{|\sqrt{5}|} = \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$

والمتسلسلة متقاربة.

7] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n^2+1}$

لنضع المتسلسلة $\sum \alpha_n = \frac{1}{n^2}$ نعلم أنها متقاربة

$\left|\frac{i^n}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$

$\Longleftarrow \sum \frac{i^n}{n^2+1}$ متقاربة حسب معيار المقارنة

وظيفة

1] $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln(n)}$ 2] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,(e-i)^n}$ 3] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n}$

4] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + i\sqrt{n}}{n+1}$ 5] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n^3}$ 6] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,(1+i)^n}$

7] $\sum_{n=0}^{\infty} 3i^n$ 8] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i}{\sqrt{n+1}}$

الحل/ نلاحظ /

1] $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln(n)} = \frac{-1}{\ln 2} + \frac{-i}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \frac{i}{\ln 5} + \frac{-1}{\ln 6} + \frac{-i}{\ln 7} + \cdots$

$= \left(\frac{-1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 4} + \frac{-1}{\ln 6} + \frac{1}{\ln 8} + \cdots\right) + i\left(\frac{-1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 5} + \frac{-1}{\ln 7} + \frac{1}{\ln 8} + \cdots\right)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(2n)} + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(2n+1)}$

نفرض $x_n = \frac{1}{\ln(2n)}$

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (1)

$\exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall n \geq n_0 : x_{n+1} < x_n$ (2)

$\Longleftarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(2n)}$ متقاربة وبنفس الطريقة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(2n+1)}$ متقاربة

$\Longleftarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln(n)}$ متقاربة

$\boxed{2}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,(e-i)^n}$ (أ) بالإمكان حل بالتفصيل

من التمرين رقم 3 بالجاهز نجد $\alpha = e-i$

$\Rightarrow |\alpha| = |e-i|$

$\Rightarrow P = \frac{e}{|e-i|} = \frac{e}{\sqrt{e^2+1}} < 1$

⇐ المتسلسلة متقاربة حسب دالامبير.

$\boxed{3}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n}$

$$P' = \left|\frac{(n+1)(2+i)^{n+1}}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n(2+i)^n}\right| = \left|\frac{(n+1)(2+i)(2+i)^n}{2\cdot 2^n} \frac{2^n}{n\,(2+i)^n}\right|$$

$$= \left|\frac{(n+1)(2+i)}{2\cdot n}\right| = \frac{|(n+1)(2+i)|}{|2\cdot n|} = \frac{(n+1)|2+i|}{2n} = \frac{(n+1)(\sqrt{5})}{2n}$$

$$P = \lim_{n\to\infty} P' = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt5\, n + \sqrt5}{2n} = \frac{\sqrt5}{2} > 1$$

⇐ المتسلسلة متباعدة حسب دالامبير

$\boxed{4}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + i\sqrt{n}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

ندرس كل متسلسلة على حدى

$\sum x_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

$\sum y_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

نلاحظ بالمتسلسلة $\sum y_n$ أن درجة البسط - درجة المقام $= \frac{1}{2} - 1$

فهي متباعدة

⇐ المتسلسلة الأساسية متباعدة.

$\boxed{5}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n^3}$

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{|1+i|^n}{|n^3|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt2)^n}{n^3}$$

حسب لوبيتال

$$\overset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt2)^n \ln(\sqrt2)}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt2)^n \ln^2(\sqrt2)}{6n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt2)^n \ln^3(\sqrt2)}{6}$$

$$= \frac{\ln^3(\sqrt2)}{6} \lim_{n\to\infty} (\sqrt2)^n = \infty$$

⇐ المتسلسلة متباعدة.

Subject ______ التاريخ :

Date ______ الموضوع :

6] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,(1+i)^n}$ تطابق التمرين رقم 3 بالحل مرة حيث $\alpha = 1+i$

$|\alpha| = |1+i| = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \lim \rho = \frac{e}{|\alpha|} = \frac{e}{\sqrt{2}} > 1$

المتسلسلة متباعدة حسب دالامبير ⇐

7] $\sum_{n=0}^{\infty} 3i^n$

متسلسلة هندسية حدها الأول $b = 3$

وأساسها $a = i$ ⇐ $|a| = 1$

فهي متباعدة.

8] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i}{\sqrt{n+1}} = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

نضع $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. فنلاحظ أن $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

كما أن $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} = a_n \quad : \forall n \in \mathbb{N}$

⇐ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ متقاربة وإذا ضربت بعدد تبقى متقاربة

⇐ $i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ متقاربة

انتهت الوظيفة

تنبيه في المتتاليات

$\{\alpha_n\}$ ، $\{\beta_n\}$

متقاربة $\alpha_n < \beta_n$ متباعدة

$\{1, 2, 1, 2, 1, \ldots\} < \{3, 3, 3, 3, \ldots\}$

$\left\{\frac{(-1)^n + 3}{2}\right\}$