المتسلسلات العقدية

⊗ تعريف المتسلسلات العقدية:

نفرض $\{z_n\}$ متتالية عقدية ولنعرف المتتالية $\{S_n\}$ كما يلي

$S_0 = z_0$

$S_1 = z_0 + z_1$

$S_2 = z_0 + z_1 + z_2$

$\vdots$

$S_n = z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$

عندئذ ندعو المتتالية $\{S_n\}$ متسلسلة حدها العام z_n

كما نرمز لها بـ $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ أو اختصاراً $\sum z_n$

وندعو المتتالية $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum z_n$

⊗ تقارب متسلسلة عقدية:

نقول عن المتسلسلة $\sum z_n$ إنها متقاربة ومجموعها S إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ متقاربة ونهايتها S ونكتب في هذه الحالة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$

// خاص

$z_n = S_n - S_{n-1}$

$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S - S = 0$

مبرهنة: نفرض $\sum z_n$ متسلسلة عقدية عندئذ

$\sum z_n$ متقاربة $\Longrightarrow z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

الإثبات:

بما أن $\sum z_n$ متقاربة عندئذ $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية متقاربة ولنفرض أن $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$ ومنه $z_n = S_n - S_{n-1}$

فنجد $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S - S = 0$

ملاحظة: إن عكس المبرهنة السابقة غير صحيح بالضرورة

فلو أخذنا $\{z_n\} = \{\frac{1}{n+1}\}$ نجد أن $z_n \to 0$ إلا أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\text{مجموعها} > \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\text{مجموعها} > \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\text{مجموعها} > \frac{1}{2}} + \dots$$

$\Longleftarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ متباعدة *

• ملاحظة: إذا كان الحد العام للمتسلسلة $\sum a_n$ لا يسعى نحو الصفر فتكون المتسلسلة متباعدة

⊗ المتسلسلة العددية الهندسية:

وهي متسلسلة من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} b \cdot a^n$: $b, a \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b \cdot a^n = ba^0 + b \cdot a^1 + ba^2 + ba^3 + \dots$$

نسمي $b \cdot a^0$ الحد الأول للمتسلسلة الهندسية

أما a أساس المتسلسلة.

ولدراسة تقارب وتباعد هذه المتسلسلة نميز الحالات التالية:

I) $|a| \geq 1$ عندئذ الحد العام لا يسعى نحو الصفر والمتسلسلة متباعدة.

II) $|a| < 1$ نلاحظ أن $|b a^n| = |b| \cdot |a|^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

ولكن هذا لا يكفي لمعرفة طبيعة المتسلسلة

$$S_n = b + b \cdot a + ba^2 + \dots + ba^n$$

$$a S_n = ab + ba^2 + \dots + ba^n + ba^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n - aS_n = b - ba^{n+1}$$

$$\Rightarrow (1-a) S_n = b(1-a^{n+1})$$

$$\Rightarrow S_n = \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right) b$$

بما أن $|a| < 1 \Leftarrow \lim a^{n+1} = 0$

$$\Rightarrow S_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{b}{1-a}$$

⇐ المتسلسلة متقاربة.

تمرين: ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات التالية:

I) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{8} i\right)^n$

متسلسلة هندسية حدها الأول $b = 1$ وأساسها $a = 1 - \frac{1}{8} i$

نلاحظ أن $|a| = |1 - \frac{1}{8} i| = \sqrt{\frac{65}{64}} > 1$

⇐ المتسلسلة متباعدة.

[2] $\sum_{n=0}^{\infty} i^n$

متسلسلة هندسية حدها الأول $b=1$

وأساسها $a=i$ ونلاحظ أن $|a|=|i|=1$

فهي متباعدة.

[3] $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n$

متسلسلة هندسية حدها الأول $b=3$

أساسها $a=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$ نلاحظ أن $|a|=\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$

فهي متقاربة ومجموعها

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n=\frac{b}{1-a}=\frac{3}{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}=\frac{3}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}=\frac{6}{1-i}$$

$$=\frac{6(1+i)}{(1-i)(1+i)}=3+3i$$

[4] $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n$

متسلسلة هندسية حدها الأول $b=\left(\frac{i}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$

وأساسها $a=\frac{i}{2}$ $\leftarrow$ $|a|=\left|\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$

فهي متقاربة ومجموعها: $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n=\frac{-\frac{1}{4}}{1-\frac{i}{2}}=\frac{-\frac{1}{2}}{2-i}=-\frac{1}{2}\,\frac{2+i}{5}=-\frac{1}{5}-\frac{1}{10}i$

[5] $\sum_{n=10}^{\infty}\left(\frac{2+n}{n}\right)^2$

ليست متسلسلة هندسية

$$\left(\frac{2+n}{n}\right)^n=\left(\frac{2}{n}+1\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}e^2$$

ومنه الحد العام لا يسعى للصفر

فالمتسلسلة متباعدة

تذكرة:

$\left(\frac{1+n}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}e$

$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{\alpha}$

$(1+n)^{\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to 0]{}e$

[6] $\sum 1$

$\sum 1 = 1+1+1+\cdots\cdots$

المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ متباعدة

Subject ______ التاريخ :

Date ______ الموضوع :

مبرهنة: نفرض $\sum z_n$ ، $\sum w_n$ متسلسلتان عقديتان

بحيث: $\exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m \Longrightarrow z_n = w_n$

عندئذ المتسلسلتين $\sum w_n$ و $\sum z_n$ من نفس الطبيعة

الإثبات: لنضع $S_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$ ، $T_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$

الحدود العامة لمتتاليتي المجاميع الجزئية $\sum w_n$ ، $\sum z_n$ على الترتيب

عندئذ يكون من أجل $n \geq m$

$$S_n - T_n = (z_0 - w_0) + (z_1 - w_1) + \cdots + (z_{m-1} - w_{n-1}) + 0 + 0 + 0 + \cdots$$

وبالتالي $\sum z_n$ متقاربة $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ موجودة ومحدودة

$\Longleftrightarrow$ $\lim T_n = S - C$ موجودة ومحدودة

$\Longleftrightarrow$ $\sum w_n$ متقاربة

حيث $C = (z_0 - w_0) + (z_1 - w_1) + \cdots + (z_{m-1} - z_{n-1})$

ملاحظة: إضافة وإزالة عدد منته من حدود متسلسلة لا يؤثر على طبيعتها وإنما يؤثر على مجموعها في حالة كانت متقاربة.

مبرهنة: نفرض $\sum z_n$ متسلسلة عقدية عندئذ تكون $\sum z_n$ متقاربة إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) > 0 : \forall n, m > n(\varepsilon) \, ; \, n > m \Longrightarrow |z_m + z_{m+1} + \cdots + z_n| < \varepsilon$$

الإثبات:

$\sum z_n$ متقاربة $\Longleftrightarrow$ متتالية المجاميع الجزئية $\{z_n\}$ متقاربة

لأن $\mathbb{C}$ فضاء تام $\Longleftrightarrow$ $\{S_n\}$ كوشية

$$\Longleftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 ; \exists n(\varepsilon) > 0 ; \forall n, m > n(\varepsilon) : |S_n - S_m| < \varepsilon \Longrightarrow (z_m + z_{m+1} + \cdots + z_n) < \varepsilon \right)$$

وهو المطلوب #

وظيفة: ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات التالية:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{-1 + \sqrt{3} i} \right)^n$ 　 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^{5n}}{(\sqrt{3} + i)^{3n}}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[n]{10 n^7 + 5n + 1}$ 　 4) $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{100 i}{n^2}$

انتهت المحاضرة الثانية عشر

حل الوظيفة / اضافي / ليس للدكتور علاقة بهم

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{-1+\sqrt{3}i}\right)^n$

متسلسلة هندسية حدها الأول $b=1$

وأساسها $a=\frac{2}{-1+\sqrt{3}i}$

$$|a|=\frac{|2|}{|-1+\sqrt{3}i|}=\frac{2}{\sqrt{1+3}}=1\geq 1$$

$\Rightarrow$ المتسلسلة هندسية و $|a|\geq 1$ فهي متباعدة

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^{5n}}{(\sqrt{3}+i)^{3n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(1+i)^5}{(\sqrt{3}+i)^3}\right)^n$

$a=\frac{(1+i)^5}{(\sqrt{3}+i)^3}$ وأساسها , $b=1$ متسلسلة هندسية حدها الأول

$$\Rightarrow |a|=\frac{|1+i|^5}{|\sqrt{3}+i|^3}=\frac{(\sqrt{2})^5}{2^3}=\frac{(\sqrt{2})^5}{(\sqrt{2})^6}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$$

$\Leftarrow$ المتسلسلة متقاربة ومجموعها

$$(1+i)^5=(\sqrt{2}\ cis\ \tfrac{\pi}{4})^5=\sqrt{2}^5\ cis\ \tfrac{5\pi}{4}$$

$$(\sqrt{3}+i)^3=(2\ cis\ \tfrac{\pi}{6})^3=8\ cis\ \tfrac{\pi}{2}$$

$$\frac{(1+i)^5}{(\sqrt{3}+i)^3}=\frac{(\sqrt{2})^5\ cis\ \frac{5\pi}{4}}{8\ cis\ \frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ cis\ \tfrac{3}{4}\pi=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^{5n}}{(\sqrt{3}+i)^{3n}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{1(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)}{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}}=1-i$$

4) $\sum_{n=10}^{\infty}\frac{100i}{n^2}=100i\sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{n^2}$