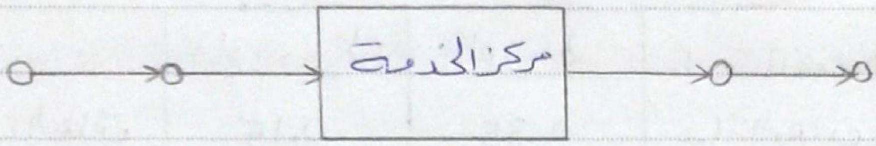
نظرية الأرتال

Queueing Theory

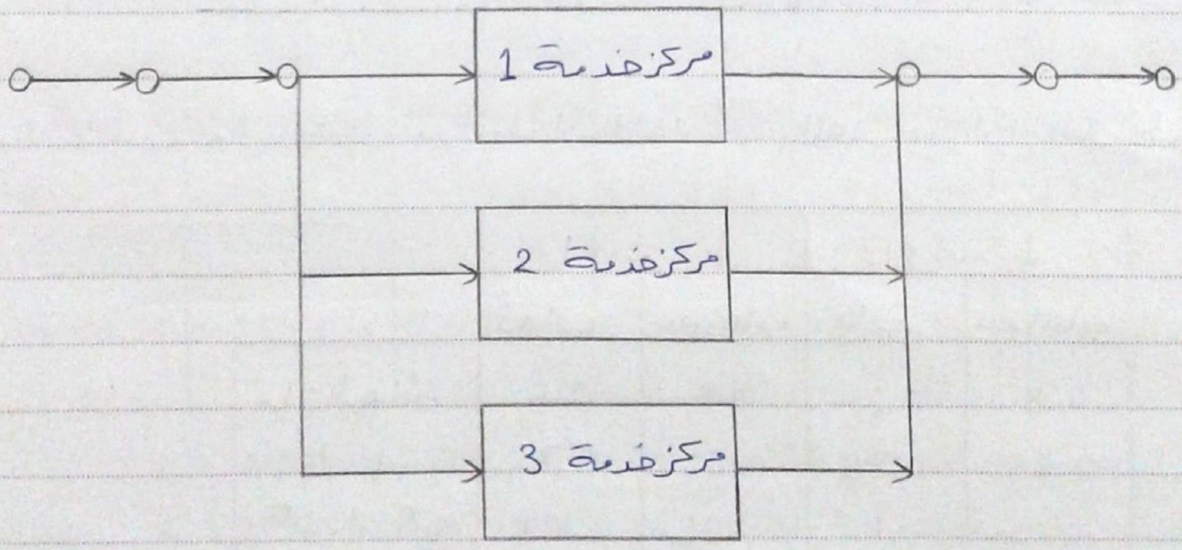
تهدف نظرية الأرتال إلى جعل المسائل التي يكون فيها الانتظار على شكل رتل وذلك لفترات زمنية ذات بعد كمي وجعلها أقل ما يمكن.
أي جعل الفترة الزمنية للانتظار مقياساً مادياً لتكلفة الانتظار، ودراسته، وإيجاد توازن بين تكلفة الانتظار وتكلفة اتخاذ القرار لتقليل فترة الانتظار

أنماط أرتال الانتظار:

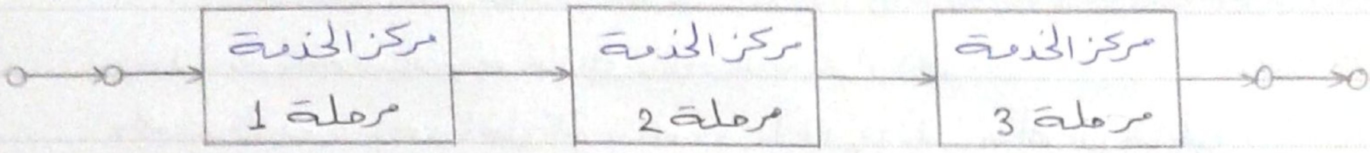
1) **النمط الأول:** مركز خدمة واحد ورتل واحد، ويمكن تمثيله بيانياً كما يلي:



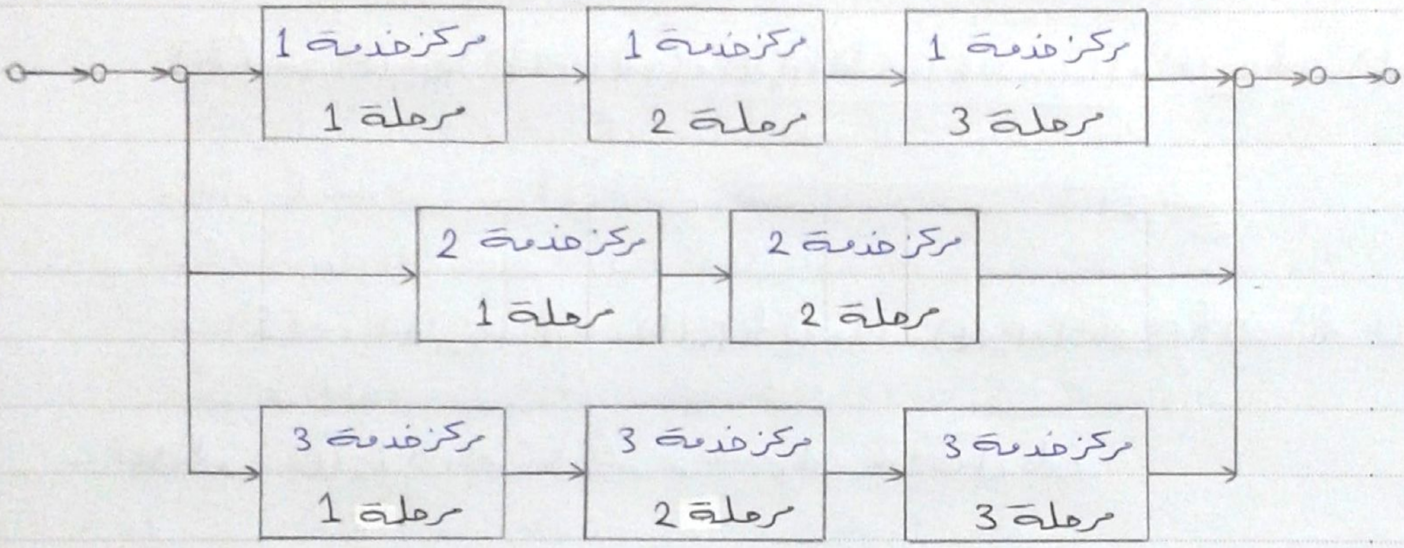
2) **النمط الثاني:** رتل واحد وعدة مراكز خدمة، ويمكن تمثيله بيانياً كما يلي:



3) **النمط الثالث:** رتل واحد ومركز خدمة واحد، ولكن بعدة مراحل، ويُمثّل بيانياً كما يلي:



4) **النمط الرابع:** رتل واحد وعدة مراكز خدمة، وكل مركز خدمة بعدة مراحل، ويمكن تمثيله بيانياً كما يلي:



المناقشة الرياضية الواقعية لحل مسائل الأرتال:

لنفرض أن الحدودية $P_n(t)$ تعبّر عن احتمال أن ينتظر الزبون n حيث $n \geq 0$ وهي محدودية تابعة للزمن.

نريد أن نوجد علاقة بين الحدوديات $P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t)$.

نفرض λ: معدل وصول الزبائن إلى مركز الخدمة خلال واحدة الزمن

و μ: معدل الخدمة التي يقدمها مركز الخدمة للزبائن خلال واحدة الزمن.

في الحقيقة، عند دراسة أرتال الانتظار فإننا عادة نحتاج إلى وقت كبير، وفي فترات زمنية متفاوتة، وبالتالي نفترض دوماً أن $t \longrightarrow \infty$.

وحتى يكون زمن انتظار الزبون أصغر ما يمكن فيجب أن يكون احتمال انتظاره أصغر ما يمكن أي أن يكون $P_n(t)$ أصغر ما يمكن مهما تغيرت t.

أي يجب أن يتحقق : $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$

عندما $t \to \infty$.

وفعلياً هذه الفرضيات تقودنا إلى حالة الاستقرار (الثبات) .

ولنوجد الآن علاقة تفاضل كثيرة الحدود $P_n(t)$ بالنسبة للزمن كما يلي :

نجري تغييراً طفيفاً جداً h على الزمن t ، عندئذٍ يكون :

$$P_n(t+h) = \lambda h P_{n-1}(t) + (1-\lambda h)(1-u h) P_n(t) + u h(1-\lambda h) P_{n+1}(t) + o(h)$$

حيث $o(h)$ هي كثيرة حدود تنتهي إلى الصفر عندما $h \to 0$.

$$P_n(t+h) = \lambda h P_{n-1}(t) + \left(1-(u+\lambda)h + u\lambda h^2\right) P_n(t) + \left(u h - u\lambda h^2\right) P_{n+1}(t) + o(h)$$

وبما أن h تغير طفيف جداً في الزمن ، فيمكن اعتبار $h^2 \to 0$ أي يصبح :

$$P_n(t+h) = \lambda h P_{n-1}(t) + P_n(t) - (u+\lambda) h P_n(t) + u h P_{n+1}(t) + o(h)$$

ننقل الحد $P_n(t)$ إلى الطرف الأيسر ثم نقسم على h فنحصل على :

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = \lambda P_{n-1}(t) - (u+\lambda) P_n(t) + u P_{n+1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

والآن نجعل $h \to 0$ نكون قد حصلنا على تفاضل كثيرة الحدود $P_n(t)$ بالنسبة للزمن :

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - (u+\lambda) P_n(t) + u P_{n+1}(t)$$

وبما أننا افترضنا بداية أن $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ فإن :

$$\lambda P_{n-1}(t) - (u+\lambda) P_n(t) + u P_{n+1}(t) = 0$$

/ /

1 مناقشة النمط الأول : قناة خدمة واحدة

* وصلنا إلى العلاقة التالية التي تربط احتمالات انتظار الزبائن ببعضها :

$$\lambda P_{n-1}(t) - (u+\lambda) P_n(t) + u P_{n+1}(t) = 0 \quad ; \quad n \geq 0$$

ومن خلال هذه العلاقة يمكننا الوصول إلى علاقة تكرارية أبسط منها وذلك بتعويض قيم n :

$n=0$:

$$\underbrace{\lambda P_{-1}(t)}_{\text{هذا الحد غير موجود}} - (u+\lambda) P_0(t) + u P_1(t) = 0$$

$$\Longrightarrow u P_1(t) = u P_0(t) + \lambda P_0(t)$$

ولكن عندما $n=0$ فهذا يعني أننا في الحالة الابتدائية التالية التي لا يكون قد وصل فيها بعد أي زبون ، وبالتالي فالخدمة لم تبدأ بعد ، أي يمكن أن نقول إن $u \to 0$ عندما لا يكون هناك أي زبون أي $u P_0(t) \to 0$ فيصبح لدينا :

$$u P_1(t) = \lambda P_0(t) \Longrightarrow \boxed{P_1(t) = \frac{\lambda}{u} P_0(t)} \quad (1)$$

$n=1$:

$$\lambda P_0(t) - (u+\lambda) P_1(t) + u P_2(t) = 0$$

نعوض (1) هنا فنجد :

$$\lambda P_0(t) - (u+\lambda) \frac{\lambda}{u} P_0(t) + u P_2(t) = 0$$

$$\Longrightarrow \cancel{\lambda P_0(t)} - \cancel{\lambda P_0(t)} - \frac{\lambda^2}{u} P_0(t) + u P_2(t) = 0$$

$$\Longrightarrow P_2(t) = \frac{\lambda^2}{u^2} P_0(t)$$

$$\Longrightarrow \boxed{P_2(t) = \left(\frac{\lambda}{u}\right)^2 P_0(t)} \quad (2)$$

$n=2$: $\lambda P_1(t) - (u+\lambda) P_2(t) + u P_3(t) = 0$

نعوض 1 و 2 هنا فنجد :

$$\lambda \left(\frac{\lambda}{u}\right) P_0(t) - (u+\lambda) \left(\frac{\lambda}{u}\right)^2 P_0(t) + u P_3(t) = 0$$

$$\Longrightarrow \cancel{\frac{\lambda^2}{u} P_0(t)} - \cancel{\frac{\lambda^2}{u} P_0(t)} - \frac{\lambda^3}{u^2} P_0(t) + u P_3(t) = 0$$

$$\Longrightarrow P_3(t) = \frac{\lambda^3}{u^3} P_0(t) \Longrightarrow \boxed{P_3(t) = \left(\frac{\lambda}{u}\right)^3 P_0(t)}$$

وبنفس الطريقة نلاحظ أنه من أجل n يكون :

$$\boxed{P_n(t) = \left(\frac{\lambda}{u}\right)^n P_0(t)}$$

* إذا استطعنا إيجاد $P_0(t)$ نكون قد حصلنا على $P_n(t)$ أياً كانت $n \geq 0$:
نعلم أن مجموع القيم الاحتمالية يساوي الواحد ، وبما أن المعادلة التفاضلية السابقة تمثل قيماً احتمالية خلال فترة زمنية فإن $0 \leq P_n(t) \leq 1$
ويكون : $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{u}\right)^n P_0(t) = 1 \Longrightarrow P_0(t) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{u}\right)^n = 1$$

ولكن السلسلة : $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{u}\right)^n = 1 + \frac{\lambda}{u} + \left(\frac{\lambda}{u}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{u}\right)^3 + \dots + \left(\frac{\lambda}{u}\right)^n + \dots$
سلسلة هندسية حدها الأول (1) وأساسها $\frac{\lambda}{u}$ ، وبالتالي هي متقاربة
ومجموعها يساوي : $S = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{u}}$

$$\Longrightarrow \boxed{P_0(t) = 1 - \frac{\lambda}{u}}$$

* نرمز بـ $\varrho = \frac{\lambda}{u}$ حيث تمثل ϱ معدل وصول الزبائن إلى معدل الخدمة المقدمة لهم ، وتسمى اقتصادياً عامل المنفعة (الربح) أو نسبة كثافة الحركة . ومنه يكون :

$$P_0 = 1 - \varrho \quad , \quad P_n(t) = \varrho^n \cdot P_0(t) \Longrightarrow P_n(t) = (1-\varrho)\varrho^n$$