التاريخ: ١٦

الموضوع: المحاضرة ١٩

الحلول العددية لجملة معادلات غير خطية

تعريف: نقول عن المعادلة $f(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$ أنها معادلة خطية إذا كانت من الشكل:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots \alpha_n x_n + \beta = 0$$

وكل شكل آخر من المعادلات ندعوه معادلة غير خطية

مثال: $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ معادلة خطية

$2x + 5 = 0$ معادلة خطية

$x^2 + 2\cancel{x} + y.x = 0$ معادلة غير خطية (لأنه يوجد تحويلين بضرب متغيرين ببعضهم)

$e^x + 3\ln(\cos x) + xy^2 = 0$ غير خطية وذلك لوجود الـ cos دالـ ln دالـ e وهي مؤثرات

---

* سوف نهتم بهذا الفصل بالحلول العددية لجملة معادلتين غير خطيتين مجهولين من الشكل:

صدفي إيجاد حل الجملة (حل مشترك)

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad *$$

نقول عن $(\bar{x}, \bar{y})$ أنه جذر للجملة $(*)$ أو حل مشترك للجملة $(*)$ إذا كان $f(\bar{x}, \bar{y}) = g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$

AL ABRASH

الموضوع:　　　　　　　　　　التاريخ: / /

ونفرض (x_0, y_0) نقطة في جوار الحل المشترك $(\bar{x}, \bar{y})$ عندئذ لحل الجملة (*) انطلاقاً من (x_0, y_0) نتبع الطرق العددية التالية:

أولاً: طريقة نيوتن:

نفرض $f(x,y)$ ، $g(x,y)$ تابعان قابلان للاشتقاقات والاشتقاقات الجزئية بالنسبة للمتحولات x, y

ونعرف الجاكوبيان للتابعان f, g كما يلي:

مشتق f بالنسبة لـ x　　مشتق f بالنسبة لـ y

الجاكوبيان للتابعان f, g

$$J(f,g) = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = f_x g_y - f_y g_x$$

مشتق g بالنسبة لـ x

الجاكوبيان كما اعتمادنا لنيوتن

عندئذ: إذا كان $J(f,g) \neq 0$ فإذاً الحل المشترك

لا يساوي التابع الصفري لأن الجاكوبيان هو التابع

للجملة (*) انطلاقاً من (x_0, y_0) حسب نيوتن يعطى بالقوانين التكرارية التالية:

للحفظ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{J} \begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)}$$

جاكوبيان

$$y_{n+1} = y_n - \frac{1}{J} \begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}_{(x_n, y_n)}$$

تابع أريد أن أطبقه عند (x_n, y_n)

ملاحظة: إذا لم نضع (x_n, y_n) في القانون فيكون لدي

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{J} \begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}$$

J هو تابع والمحدد | | هو تابع ثانٍ - تابع تقسيم تابع هو تابع ولدي x_{n+1}

هو عدد فيكون خاطئ لذلك نقرب التابع بـ (x_n, y_n)

التاريخ:

الموضوع:

نفرض ع الدقة المطلوبة عندئذٍ نتوقف عن التكرار عندما

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \quad , \quad |y_{n+1} - y_n| < \varepsilon$$

ويكون: $(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} (\bar{x}, \bar{y})$

طريقة النيوتن هو تعميم لطريقة المماسات

تمرين: باستخدام طريقة نيوتن وانطلاقاً من النقطة $(1,1)$
أوجد حل مشترك تقريبي لجملة المعادلتين:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$g(x,y) = -x + y = 0$$

بدقة $= \varepsilon = 0,002$

الحل:

$$J(f,g) = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -1 & +1 \end{vmatrix} =$$

$$2x + 2y \neq 0$$

ومنه يوجد حل للجملة وليكن $(\bar{x}, \bar{y})$

$$(x_0, y_0) = (1,1) \Rightarrow J(x_0, y_0) = 4 \neq 0$$

$1 = 1^2 + 1^2 - 1 =$ ع الـ f عند الواحد

ومنه

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{J} \begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix} (x_0, y_0)$$

$-1 + 1 = 0$ الـ g عند الواحد

$$= 1 - \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.75$$

$$y_1 = y_0 - \frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}(x_0, y_0) = 1 - \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.75$$

[illegible] ($\neq 0$)

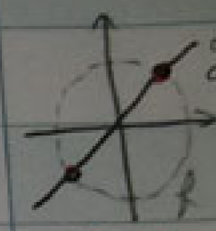
$$(x_1, y_1) = (0.75, 0.75) \Rightarrow J(x_1, y_1) = 3 \neq 0$$

$\Rightarrow f(x,y)$ [illegible] معادلة [illegible] دائرة مركزها (0،0)

[illegible] من النقاط الواقعة على الدائرة

[illegible] الجذور

$g(x,y)$ [illegible] الربع الاول والثالث



[illegible]

$$x_2 = 0.75 - \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 0.125 & 1.5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.7083$$

نعوض بنقاط (x_1, y_1)

$$y_2 = 0.75 - \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1.5 & 0.125 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.7083$$

$$(x_2, y_2) = (0.7083, 0.7083) \Rightarrow J(x_2, y_2) \cancel{= 2.8}$$

$$\Rightarrow J(x_2, y_2) = 2.8332 \neq 0$$

2×0.7083

$$x_3 = 0.7083 - \frac{1}{2.8332}\begin{vmatrix} 0.0033 & 1.4166 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.70$$

$$y_3 = 0.7083 - \frac{1}{2.8332}\begin{vmatrix} 1.4166 & 0.0033 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.70$$

التاريخ:

الموضوع:

ومنه $(x_3, y_3) = (0.7071, 0.7071)$

نلاحظ أن

$$|x_3 - x_2| = 0.0012 < \varepsilon$$

$$|y_3 - y_2| = 0.0012 < \varepsilon$$

ومنه

$$(\bar{x}, \bar{y}) \simeq (x_3, y_3) = (0.7071, 0.7071)$$

للتأكد:

$$f(x_3, y_3) = 0.00001$$

$$g(x_3, y_3) = 0$$

مطلوب التوضيح في الامتحان

تكون جذر فعلي لما الشيء يساوي صفر وهذه الاجابة ليست جذر فعلي

نلاحظ أن $(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

الجذر الفعلي من تقاطع الحل المشترك للمعادلتين

إذا أخذنا جواب $0.707106 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

تمرين: باستخدام طريقة نيوتن أوجد الجذر التقريبي للجملة انطلاقاً من $(1, 2)$

$$f(x, y) = e^{x} - y - 2 = 0$$

$$g(x, y) = \ln(x + 2) - y = 0$$

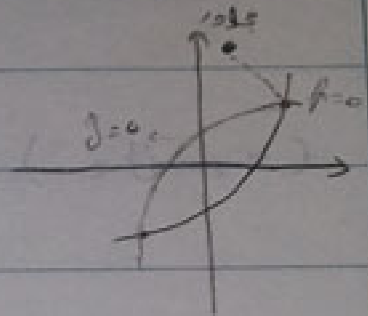
بدقة $\varepsilon = 0.02$

الحل: نلاحظ أن

$$J(f,g) = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & -1 \\ \frac{1}{x+2} & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{x+2} - e^x \neq 0$$

هناطع
صنا س x
ويكن
أن نقطع
عدد ثابت
أو معدوم y

ومنه يوجد جذر للجملة ولكن $(\bar{x}, \bar{y})$



$$(x_0, y_0) = (1, 2)$$

$$J(x_0, y_0) = \frac{1}{3} - e = -2.3849 \neq 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{J} \begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix} (x_0, y_0)$$

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2.3849} \begin{vmatrix} -1.2817 & -1 \\ -0.9013 & -1 \end{vmatrix} = 1.1595$$ إذا كان الجاكوبيان

$$y_1 = y_0 - \frac{1}{J} \begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix} (x_0, y_0)$$

$$= 2 + \frac{1}{2.3849} \begin{vmatrix} 2.7182 & -1.2817 \\ \frac{1}{3} & -0.9013 \end{vmatrix} = 1.1518$$

ومنه $(x_1, y_1) = (1.1595, 1.1518)$

التاريخ:

الموضوع:

$J(x_1, y_1) = -2.8718 \neq 0$

$x_2 = 1.1595 + \frac{1}{2.8718}\begin{vmatrix} 0.0365 & -1 \\ -0.0013 & -1 \end{vmatrix} = 1.1463$

$y_2 = 1.1463$

ومنه : $(x_2, y_2) = (1.1463 , 1.1463)$

نلاحظ أن :

$|x_2 - x_1| = 0.0132 < \varepsilon$

$|y_2 - y_1| = 0.0055 < \varepsilon$

ومنه $(\bar{x}, \bar{y}) \simeq (x_2, y_2) = (1.1463, 1.1463)$

وظيفة : باستخدام طريقة نيوتن أوجد الجذر التقريبي

$f(x, y) = \ln x^2 + y - 4 = 0$

$g(x, y) = x^2 y - 2e^y = 0$

انطلاقا من $(2, 1.5)$ بدقة $\varepsilon = 0.02$