المحاضرة التاسعة : الجداء والجداء المرافق لأسرة موديولات

Product and coproduct

الجداء الديكارتي :

لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة موديولات على حلقة R و لنعرف على المجموعة

$$\prod_{i\in I} M_i = \{(m_i)_{i\in I} \; ; \; m_i \in M_i\}$$

قانوني التشكيل:

داخلي $(+)$: $(m_i)_{i\in I} + (m'_i)_{i\in I} = (m_i + m'_i)_{i\in I}$

خارجي «R» $(.)$: $\alpha . (m_i)_{i\in I} = (\alpha m_i)_{i\in I}$

فنجد ان $\prod_{i\in I} M_i$ موديول على R .

ويكون $pr_k : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_k \; ; \; k \in I$

تشاكل موديوليا غامرا يسمى الاسقاط القانوني (k) .

مثال: $pr_k : \prod_{i=1}^{3} M_i \longrightarrow M_k$

$(m_1, m_2, m_3) \longmapsto m_k$

- جداء أسرة موديولات product :

تعريف: لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة موديولات على حلقة R، نعرف جداء الأسرة $(M_i)_{i\in I}$ «product» بأنه ثنائية (P, f_i) حيث P موديول على R

- بحيث:

$(f_i : P \longrightarrow M_i)_{i\in I}$ أسرة تشاكلات موديولية بحيث من اجل اي موديول M واسرة تشاكلات $(g_i : M \longrightarrow M_i)_{i\in I}$ يوجد تشاكل موديولي وحيد $h : M \longrightarrow P$ يحقق $f_i \circ h = g_i \; (\forall i \in I)$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g_i"] \\ P \arrow[r, "f_i"'] & M_k \end{tikzcd}$$

مبرهنة: إذا كانت $(P, (f_i)_{i\in I})$ جداء لأسرة موديولات $(M_i)_{i\in I}$ على حلقة R فإن f_i غامر $(\forall i \in I)$

البرهان:

نفرض أنه يوجد $k\in I$ بحيث f_k ليس غامراً، عندئذٍ بما أن (P,f_i) جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$.

فإنه من أجل أي مودول M وبالتالي من أجل M_k وللأسرة $g_i: M\to M_i$ المعرفة كما يلي: $g_k = I_{M_k}$ $\wedge$ $g_i = 0 : i\neq k$

$$\begin{tikzcd} & M_k \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g_k = I_{M_k}"] \\ P \arrow[r, "f_k"'] & M_k \end{tikzcd}$$

$$f_k\circ h = \underbrace{I_{M_k}}_{\text{غامر}}$$

I_{M_k} غامر $\Rightarrow f_k$ غامر

تذكرة: $f\circ g$ غامر $\Rightarrow f$ غامر

$f\circ g$ متباين $\Rightarrow g$ متباين

مبرهنة:

إذا كان $(P,(f_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة المودولات $(M_i)_{i\in I}$ فإن القضيتين التاليتين متكافئتين:

(I) $(P',(f'_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$

(II) يوجد تماثل $h:P'\to P$ يحقق $\forall i\in I$ $f_i\circ h = f'_i$

البرهان: $I \Rightarrow II$:

بما أن $(P,(f_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإنه من أجل المودول P' وأسرة التشاكلات $f'_i : P'\to M_i$

$$\begin{tikzcd} & P' \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f'_i"] \\ P \arrow[r, "f_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

يوجد تشاكل $h: P'\to P$ يحقق

① $\forall i\in I$ $f_i\circ h = f'_i$

ولإتمام المطلوب يكفي أن نثبت h متباين وغامر:

- بما أن $(P',(f'_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإنه من أجل المودول M

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "k"'] \arrow[d, "f_i"] \\ P' \arrow[r, "f'_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

وبالتالي من أجل المودول P من أجل أسرة تشاكلات $f_i : P\to M_i$ يوجد تشاكل مودولي وحيد k بحيث

/ /

$k : P \longrightarrow P'$ يحقق $f'_i \circ k = f_i\ (\forall i \in I)$ -- ②

وعلما أن $f_i \circ I = f_i$ ومن ① و② نجد $(f_i \circ h)\circ k = f_i$

$\Rightarrow f_i \circ (h \circ k) = f_i$ ③

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "f_i"] \\ P \arrow[r, "f_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

لكن $(P, (f_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإنه حسب المخطط يوجد تشاكل وحيد $\varphi : P \to P$ بحيث $f_i \circ \varphi = f_i$

$\varphi = I$ أي ③ تتحقق فقط عندما $h \circ k = I_P$

$\Leftarrow h$ غامر

$k \circ h = I_{P'} \wedge$ ② in ① $\Leftarrow h$ متباين # .

$II \Rightarrow I$: لتكن M مودولاً ما على حلقة R $(g_i : M \longrightarrow M_i)_{i\in I}$

أسرة تشاكلات ما ولنبرهن على وجود تشاكل مودولي وحيد

$\varphi : M \longrightarrow P'$ يحقق $f'_i \circ \varphi = g_i\ \forall i \in I$.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "g_i"] \\ P' \arrow[r, "f'_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

لنتأمل المخطط -2- حيث (P, f_i) جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فيوجد تشاكل مودولي وحيد $\nu : M \longrightarrow P$ يحقق $f_i \circ \nu = g_i\ \forall i \in I$

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[dll, "\varphi"'] \arrow[dl, "\nu"] \arrow[d, "g_i"] \\ P' \arrow[r, shift left, "h"] & P \arrow[l, shift left, "h^{-1}"] \arrow[r, "f_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

-2-

وبما أن $h : P' \longrightarrow P$ تقابل فإن $h^{-1} : P \longrightarrow P'$ موجود ووحيد

وبالتالي يوجد تشاكل وحيد φ بحيث $\varphi = h^{-1} \circ \nu : M \longrightarrow P'$

ويكون
$$\begin{aligned} f'_i \circ \varphi &= f'_i \circ (h^{-1} \circ \nu) \\ &= (f'_i \circ h^{-1}) \circ \nu \\ &= f_i \circ \nu \\ &= g_i \quad (\forall i \in I) \quad \# \end{aligned}$$

ملاحظة: $f_i \circ h = f'_i \wedge h$ تقابل

$f_i = f'_i \circ h^{-1}$

انتهت المحاضرة...

Magic Book