

المحاضرة التاسعة : الكداء والكداء المرافقة لأسرة عودولات

Product and coproduct

الكداء الديكاري:

لتكن $(M_i)_{i \in I}$ أسرة عودولات على حلقة R و لنفرض على المجموعة

$$\prod_{i \in I} M_i = \{ (m_i)_{i \in I} \mid m_i \in M_i \}$$

قانوني التكوين:

(+) دافلي : $(m_i)_{i \in I} + (m'_i)_{i \in I} = (m_i + m'_i)_{i \in I}$

(.) خارجي R : $\alpha \cdot (m_i)_{i \in I} = (\alpha m_i)_{i \in I}$

فجدا ان $\prod_{i \in I} M_i$ عودول على R .

ويكون $p_k : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_k \mid k \in I$

تلك عودولياً عاصراً يسمى الإسقاط القانوني (k)

مثال : $p_k : \prod_{i=1}^3 M_i \rightarrow M_k$
 $(m_1, m_2, m_3) \mapsto m_k$

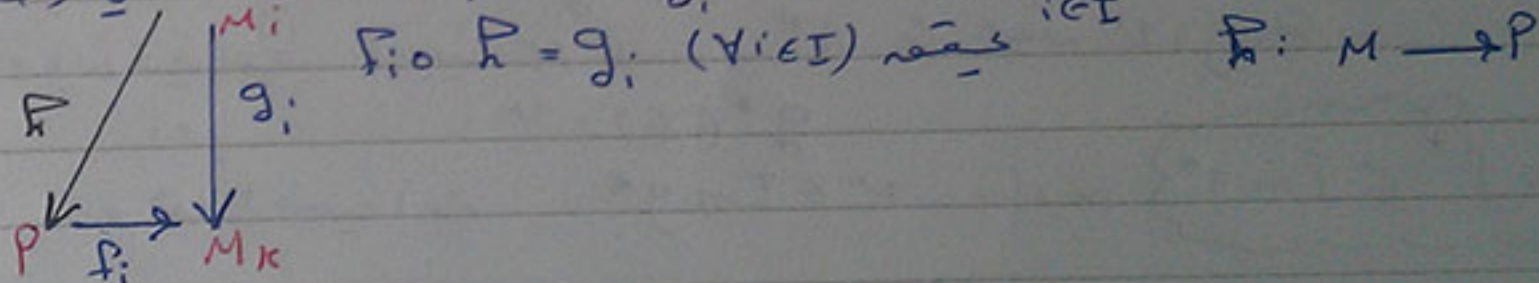
عبار أسرة عودولات Product :

تعريف : لتكن $(M_i)_{i \in I}$ أسرة عودولات على حلقة R , نفرض عبار الأسرة

$(M_i)_{i \in I}$ «product» بأنه ثنائية (P, f_i) حيث P عودول على R -

لتكن $(f_i : P \rightarrow M_i)_{i \in I}$ أسرة تشاكلات عودولية حيث هذا كل عودول M

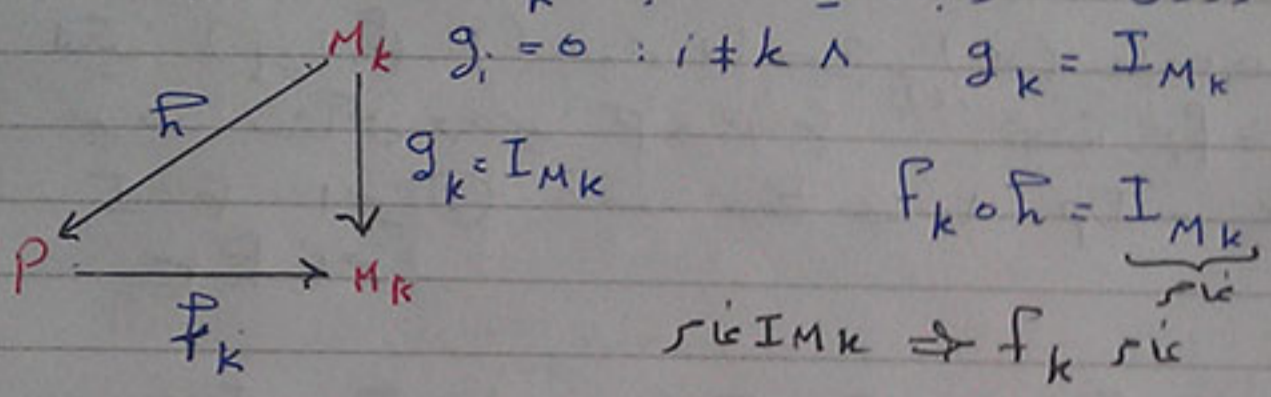
واسرة تشاكلات $(g_i : M \rightarrow M_i)_{i \in I}$ يوجد تشاكل عودولي وحيد



مبرهنة : إذا كانت $(P, (f_i)_{i \in I})$ عبار لأسرة عودولات $(M_i)_{i \in I}$ على حلقة R فإن f_i عاصر $(\forall i \in I)$

البرهان :
 نفرض أنه يوجد $k \in I$ حيث f_k ليس عامراً ، عندئذٍ عناصر (p, f_i)
 عبارة عن أسرة $(M_i)_{i \in I}$.

فإنه من أجل أي مودول M وبالتالي من أجل M_k ولأسرة M_i $g_i: M \rightarrow M_i$
 المعرفة كما يلي : $g_k = I_{M_k}$ $g_i = 0 : i \neq k$



عناصر $I_{M_k} \Rightarrow f_k$ عامر

تذكرة :
 $f \circ g$ عامر $\Rightarrow f$ عامر
 $f \circ g$ عتيبه $\Rightarrow f$ عتيبه

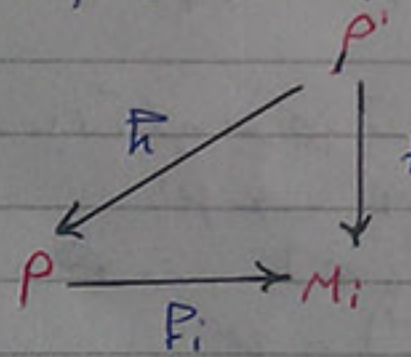
مبرهنة :

إذا كان $(p, (f_i)_{i \in I})$ عبارة عن أسرة المودولات $(M_i)_{i \in I}$ فإن العنصرين p و f_i متماثلين :

I, $(p', (f'_i)_{i \in I})$ عبارة عن أسرة $(M_i)_{i \in I}$
 II, يوجد تماثل $h: p' \rightarrow p$ يحققه $\forall i \in I$ $f_i \circ h = f'_i$

البرهان : I \Rightarrow II :

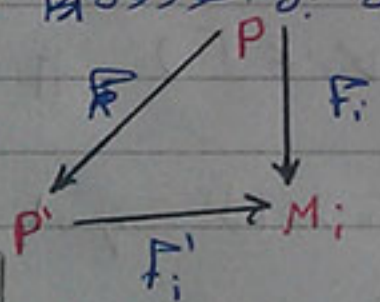
$(p, (f_i)_{i \in I})$ عبارة عن أسرة $(M_i)_{i \in I}$ فإنه من أجل المودول p' وأسرة
 التماثلات $f'_i: p' \rightarrow M_i$



يوجد تماثل $h: p' \rightarrow p$ يحققه $f_i \circ h = f'_i \forall i \in I$ ①

وليتعام المطلوب يكفي أن نثبت h عتيبه و عامر :

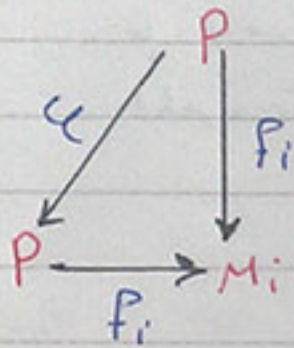
عناصر $(p', (f'_i)_{i \in I})$ عبارة عن أسرة $(M_i)_{i \in I}$ فإنه من أجل المودول M



وبالتالي من أجل المودول p من أجل أسرة التماثلات
 $f_i: p \rightarrow M_i$ يوجد تماثل مودولي وهو k حيث

$$\textcircled{2} \quad \dots (\forall i \in I) f_i \circ k = f_i \quad k: P \rightarrow P'$$

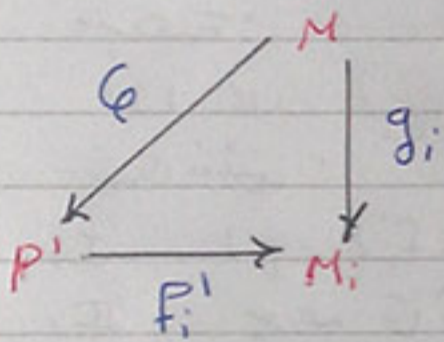
ويعادل $f_i \circ I = f_i$ وحينئذ $\textcircled{1}$ و $\textcircled{2}$ نجد $(f_i \circ h) \circ k = f_i$
 $\Rightarrow f_i \circ (h \circ k) = f_i \quad \textcircled{3}$



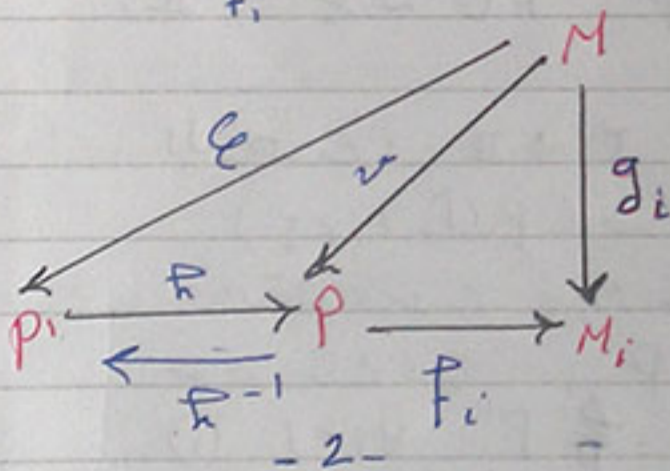
لكن $(P, (f_i)_{i \in I})$ عبارة عن أسرة $(M_i)_{i \in I}$ فإنها حسب المخطط
 يوجد تشاكل وحيد $\varphi: P \rightarrow P'$ حيث $f_i \circ \varphi = f_i$
 $\textcircled{3}$ تحققه فقط عند $h \circ k = I_P$ أي $\varphi = I$
 $h \Leftarrow P$ غامر

$$\# \quad h \Leftarrow P \Leftrightarrow \textcircled{2} \wedge \textcircled{1} \quad \wedge \quad k \circ h = I_{P'}$$

$I \Rightarrow II$: لكن M مودولاً ما على حلقة R $(g_i: M \rightarrow M_i)_{i \in I}$
 أسرة تشاكلات ما ولنزلهن على وجود تشاكل مودولي وحيد
 $\varphi: M \rightarrow P'$ يحقق $f_i \circ \varphi = g_i \quad \forall i \in I$



لنأخذ من المخطط 2- حيث (P, f_i) عبارة عن أسرة
 $(M_i)_{i \in I}$ فيوجد تشاكل مودولي وحيد $\psi: M \rightarrow P'$
 يحقق $f_i \circ \psi = g_i \quad \forall i \in I$



دعنا نأخذ $h: P' \rightarrow P$ تشاكل ما
 $k: P \rightarrow P'$ موجد وحيد

وبالتالي يوجد تشاكل وحيد φ حيث
 $\varphi: M \rightarrow P'$ $f_i \circ \varphi = g_i$
 ويكون $f_i \circ \varphi = f_i \circ (h \circ \psi)$
 $= (f_i \circ h) \circ \psi$
 $= f_i \circ \psi$
 $= g_i \quad (\forall i \in I) \quad \#$

$$f_i \circ h \circ \psi = f_i \circ \psi$$

$$f_i \circ h = f_i$$

انتهت المحاضرة ...