المحاضرة العاشرة:

الجداء المرافق لأسرة مودولات:

لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على حلقة R ، نعرف الجداء المرافق coproduct
للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ إنه ثنائية $(C,(f_i)_{i\in I})$ حيث C مودول على الحلقة R .
و $f_i : M_i \to C$ تشاكلات مودولية بحيث من اجل اي مودول M على R وأية
أسرة تشاكلات $g_i : M_i \to M$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $h : C \to M$
بحيث $h\circ f_i = g_i \quad \forall i\in I$ كما في الشكل التالي:

$$\begin{tikzcd}
M & \\
M_i \arrow[u, "g_i"] \arrow[r, "f_i"'] & C \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}$$

مبرهنة: إذا كان $(C,(f_i)_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$
فإن التشاكل f_i متباين $(\forall i\in I)$

الإثبات:

نفرض جدلاً أنه يوجد $k\in I$ بحيث f_k ليس متبايناً.
فإن $(C,(f_i)_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإنه من اجل المودول $M=M_k$
وأسرة التشاكلات g_i فإن $g_k = I_{M_k}$ ، $g_i = 0 \ \forall i\neq k$
ومنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $h : C \longrightarrow M_k$
بحيث أن $h\circ f_k = I_{M_k}$
وبما أن I_{M_k} متباين $\Leftarrow$ f_k متباين #

$$\begin{tikzcd}
M_k & \\
M_k \arrow[u, "g_k"] \arrow[r, "f_k"'] & C \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}$$

مبرهنة:

إذا كان $(C,(f_i)_{i\in I})$ جداء مرافقاً لأسرة المودولات $(M_i)_{i\in I}$ فإن القضيتين
التاليتين متكافئتين:

I ، $(C',(f'_i)_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$

II ، يوجد تماثل مودولي وحيد $h : C \to C'$ بحيث يكون $h\circ f_i = f'_i$

الإثبات:

$I \Rightarrow II$

بما أن $(C,(f_i)_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإنه من اجل المودول C'
وأسرة التشاكلات $f'_i : M_i \longrightarrow C'$
يوجد تشاكل مودولي وحيد $h : C \longrightarrow C'$
يحقق $h\circ f_i = f'_i$ ①

$$\begin{tikzcd}
C' & \\
M_i \arrow[u, "f'_i"] \arrow[r, "f_i"'] & C \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}$$

وبما أن $(C', (f'_i)_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$

فإن من أجل المودول C وأسرة التشاكلات $f_i : M_i \to C$

$$\begin{tikzcd} C & \\ M_i \arrow[u, "f_i"] \arrow[r, "f'_i"'] & C' \arrow[ul, "k"'] \end{tikzcd}$$

يوجد تشاكل مودولي وحيد $k : C' \to C$ يحقق

$$k \circ f'_i = f_i \quad ②$$

$$① \text{ in } ② \Rightarrow k\circ(h\circ f_i) = f_i \quad \forall i\in I$$

$$\left.\begin{array}{l} (k\circ h)\circ f_i = f_i \\ I\circ f_i = f_i \end{array}\right\} \forall i\in I \quad ③$$

ونعلم أن

وبما أن $(C,(f_i)_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$

فإنه من أجل المودول C والأسرة $(f_i)_{i\in I}$

$$\begin{tikzcd} C & \\ M_i \arrow[u, "f_i"] \arrow[r, "f_i"'] & C \arrow[ul, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

حيث يوجد تشاكل مودولي وحيد $\alpha : C \to C$

ويحقق $\alpha\circ f_i = f_i \;.\; \forall i\in I$

من ③ نجد أن $k\circ h = I_C$ وهذا يبين لنا h متباين

وبالمثل نجد أن $h\circ k = I_{C'}$ أي أن h غامر #

$\boxed{\text{II} \Rightarrow \text{I.}}$

يكفي إثبات أنه من أجل المودول M وأسرة تشاكلات $g_i : M_i \to M$

يوجد تشاكل مودولي وحيد $\nu : C' \to M$

يحقق $\nu\circ f'_i = g_i \quad (\forall i\in I)$

$$\begin{tikzcd} M & \\ M_i \arrow[u, "g_i"] \arrow[r, "f'_i"'] & C' \arrow[ul, "\nu"'] \end{tikzcd}$$

بما أن $(C,(f_i)_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$

فإنه من أجل المودول M والأسرة $(g_i)_{i\in I}$ يوجد تشاكل مودولي وحيد

$\varphi : C \to M$ حيث $\varphi\circ f_i = g_i \;\; \forall i\in I$

$$\begin{tikzcd} M & \\ M_i \arrow[u, "g_i"] \arrow[r, "f_i"'] & C \arrow[ul, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

وبما أن $h : C \to C'$ تقابل وحيد فإن $h^{-1} : C' \to C$

موجود ووحيد وبالتالي يوجد تشاكل وحيد

$\nu = \varphi\circ h^{-1} : C' \to M$ يحقق

$$\begin{aligned} \nu\circ f'_i &= (\varphi\circ h^{-1})\circ f'_i \\ &= \varphi\circ(h^{-1}\circ f'_i) \\ &= \varphi\circ f_i = g_i \end{aligned}$$