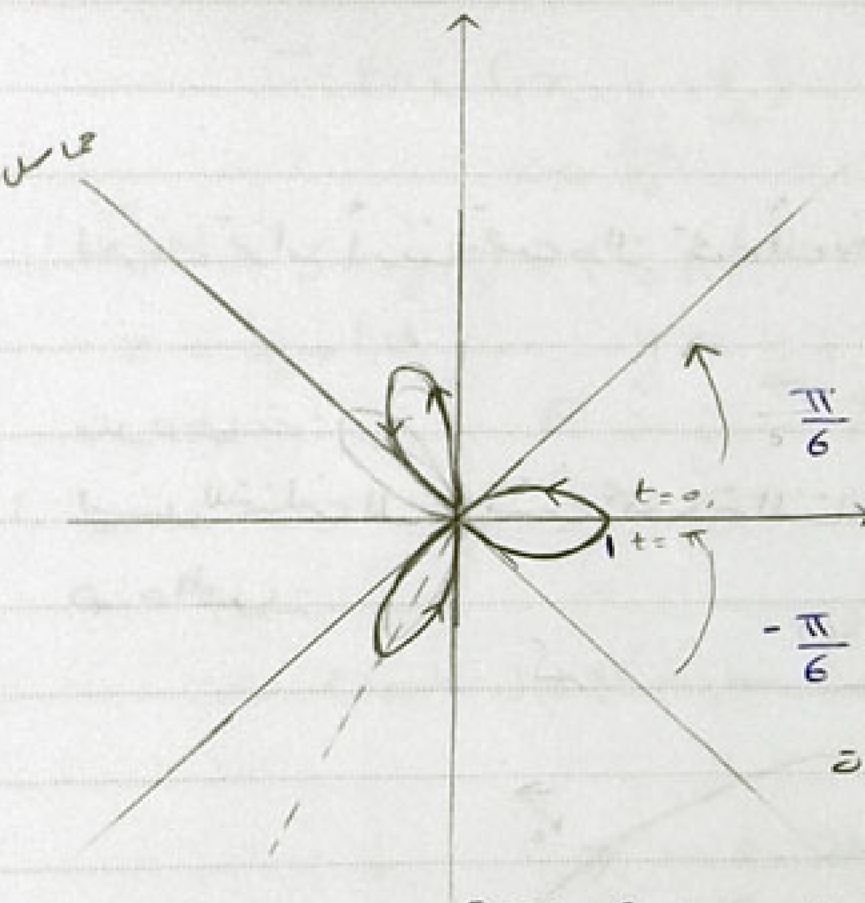
الأحد: 2/11/2014

المحاضرة السابقة:

تتمة الأمثلة عن المنحنيات الهندسية

4. ورقة البرسيم:

هو منحنٍ معين بالتمثيل التالي:




$$\begin{cases} x = \cos(3t)\cos t \\ y = \cos(3t).\sin t \\ z = 0 \end{cases} ; \quad 0 \leq t \leq \pi$$

إنّ جميع نقاط هذه الورقة بسيطة باستثناء المبدأ مضاعف من المرتبة الثالثة أي تمر به ثلاث مرات

ولبيان ذلك: نأخذ

$x=0, \ y=0, \ z=0$ لحل هذه المعادلات الثلاثة تتم

$$t_1 = \frac{\pi}{6}, \ t_2 = \frac{\pi}{2}, \ t_3 = \frac{5\pi}{6}$$

$\Rightarrow \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) = \vec{r}(t_3) = \vec{0}$ ; $t \in [0,\pi]$ (الورقة ممسوحة ثلاث مرات)

وباستثناء النقطة $(1,0,0)$ هي مضاعفة من المرتبة الثانية لأنها تقابل $(t=0, \ t=\pi)$

وبالتالي الدالة $\vec{r}(t)$ غير متباينة

1- من الواضح أنّ $\vec{r}(t)$ مستمرة على $[0, \pi]$

2- كما أن $\vec{r}(t)$ متباينة محلياً على المجال $[0, \pi]$

من الرسم (أو حسب التعريف)

مجموعة متجهات مواضع نقاط المنحني $= \vec{r}([0,\pi])$

مما سبق نجد أنّ ورقة البرسيم هي منحنٍ هندسي.

2 ما

## تعريف التمثيل الوسيطي :

نسمي أي دالة متجهية القيمة من مجال $I$ إلى $\mathbb{R}^3$ تمثيلاً وسيطياً.

كما نسمي متحول الدالة $\vec{r}$ وسيط ذلك التمثيل

ونسمي المجموعة:

متجهات الموضع هي قيم من الدالة

$$A = \{ p \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \vec{op} = \vec{r}(t) \wedge t \in I \}$$

دعامة التمثيل أو المجموعة النقطية للتمثيل $\vec{r}$

. لتكن $p \in A$ ولتكن $B = \vec{r}^{\,-1}(p)$ الصورة العكسية مجموعة جزئية من المجال $p$ بالنسبة $\vec{r}$

مجموعة القيم $t$ التي تحقق $\vec{op} = \vec{r}(t)$ $B = \{ t \in I \; ; \; \vec{op} = \vec{r}(t) \} \subseteq I$

. ونميز الحالات:

1- $|B| = 1 \Leftarrow B = \{ t_0 \} \; ; \; t_0 \in I$

في هذه الحالة نسمي $p$ نقطة بسيطة للتمثيل $\vec{r}$ ونسمي $t_0$ بقيمة الوسيط الموافقة (المقابلة) للنقطة $p$ التي تحقق $(\vec{op} = \vec{r}(t_0))$ ولا يوجد $t$ أخرى تحقق هذه المساواة لأن $|B| = 1$

2- $|B| = m \Leftarrow B = \{ t_1, t_2, \dots, t_m \}$

في هذه الحالة نسمي $p$ نقطة مضاعفة من المرتبة $m$ للتمثيل $\vec{r}$ ويكون:

$$\vec{op} = \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) = \dots = \vec{r}(t_m)$$

## ملاحظات :

1- إنّ التمثيل $\vec{r}$ يزود دعامة (مجموعة النقطية) بترتيب (تسلسل معين) معرف كما يلي:

$\vec{r}(t_1)$ تأتي قبل $\vec{r}(t_2)$ إذا وفقط إذا كانت $t_1 < t_2$

وعندئذٍ نقول إن المجموعة النقطية مرتبة وفقه تزايد وسيط $\vec{r}$

2- إذا كانت $p$ مقابلة لقيمتي الوسيط المختلفتين $t_1, t_2$

$$\vec{op} = \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$$

هندسياً النقطة واحدة ولكن مع الزمن نمر بها مرتين وبالتالي سنعتبر النقطتين $\vec{r}(t_1), \vec{r}(t_2)$

مختلفتين في المجموعة النقطية المرتبة $(t_1, \vec{r}(t_1))$ $(t_2, \vec{r}(t_2))$

بعض المراجع ترمز لهذا الشكل فتميز بين النقطتين

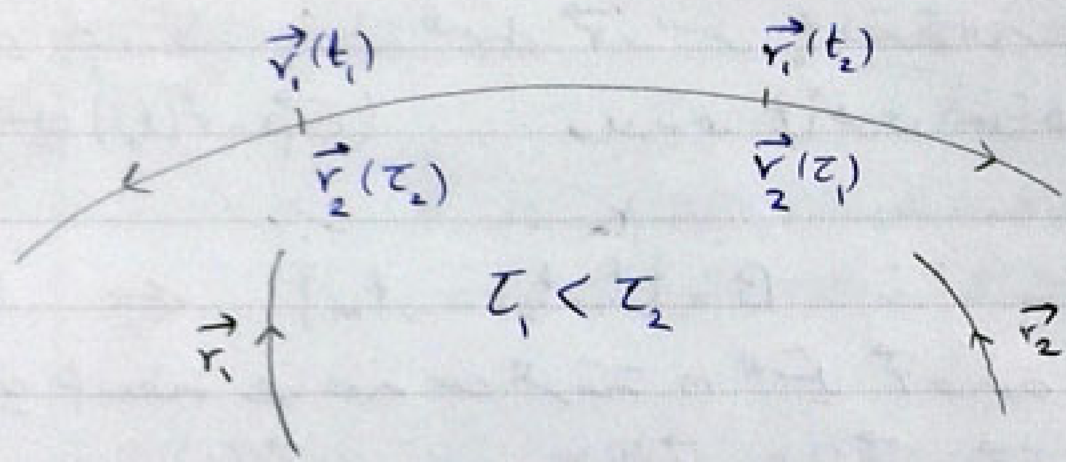
3* يصبح المقوس البسيط مجموعة نقطية لتمثيل وسيطي مستمر وتبايني ومعرف على مجال مغلق.

* يصبح المنحني الهندسي مجموعة نقطية لتمثيل وسيطي مستمر وتبايني محلياً على مجال (جميع أنواع المجالات - مفتوح، مغلق، نصف مفتوح -).

4- يمكن للمجموعة النقطية بشكل عام والمنحني هندسي أو مقوس بسيط بشكل خاص أن تكون مسارية للمجموعة النقطية لعدد غير منته من التمثيلات الوسيطية كما أن نقطة ما من هذه المجموعة قد تكون بسيطة بالنسبة لتمثيل ما ومضاعفة بالنسبة لتمثيل آخر.

حتى إذا افترضنا أن طبيعة النقاط واحدة (إما منه حيث بسيطة أو مضاعفة) بالنسبة لتمثيلين وسيطين فقد تزود التمثيل الأول هذه المجموعة بترتيب مماثل أو معاكس للترتيب الذي تزوده التمثيل الثاني لتلك المجموعة.

$t_1 < t_2$




تعريف مفهوم التكافؤ بين تمثيلين وسيطين:

يكون التمثيلان الوسيطيان متكافئين بحيث يكون لهما:

1- مجموعة نقطية مشتركة.

2- لنقاط المجموعة النقطية المشتركة الطبيعة ذاتها بالنسبة للتمثيلين من حيث (البساطة، التضاعف من مرتبة معينة).

3- أن يزود كلا التمثيلين المجموعة النقطية بالترتيب ذاته.

إعادة تعد المحاضرة السابقة

تعريف:

نقول عن تمثيلين وسيطين: $\vec{r}_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , $\vec{r}_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

يجب أن تكون المجالات $I_1, I_2$ من نفس الطبيعة { مغلقة - مفتوح }

إنهما متكافئان، إذا وُجدت دالة $\phi : I_2 \longrightarrow I_1$ متزايدة تماماً مستمرة وغامرة

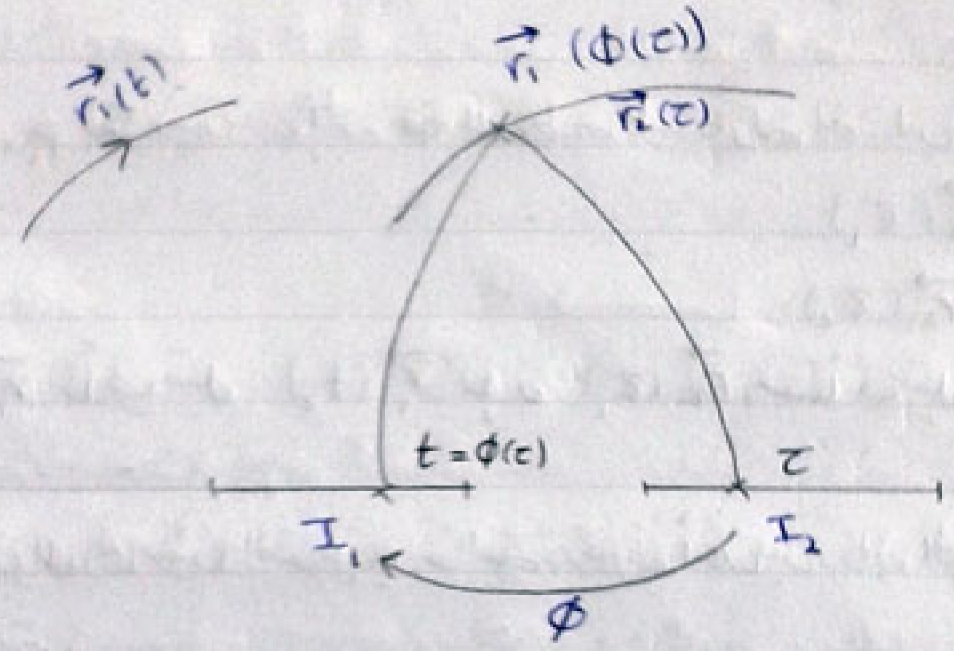
$$\tau \longmapsto \phi(\tau) = t$$

تجعل المخطط التالي تبديلياً:

$$\begin{tikzcd} I_1 \arrow[r, "\vec{r}_1"] & \mathbb{R}^3 \\ I_2 \arrow[u, "\phi"] \arrow[ur, "\vec{r}_2"'] & \end{tikzcd}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \phi$$

$$\boxed{\vec{r}_2(\tau) = \vec{r}_1(\phi(\tau))\ ;\ \forall \tau \in I_2}$$




وإذا كانت $t = \phi(\tau)$ نسمي $\tau, t$ عندئذٍ تيم وسطاء متقابلة.

التمثيلات المتعاكسان:

إن تعريف التمثيلين المتعاكسين مماثل للتعريف التمثيلي المتكافئين باستثناء أن $\phi$ تكون متناقصة تماماً بدلاً من متزايدة تماماً.

- من السهل بيان أن للتمثيلين المتعاكسين المجموعة النقطية ذاتها، ولكن التمثيل الأول يزودها بترتيب (بتوجيه) معاكس للترتيب الذي يزودها به التمثيل الثاني.
- إذا كان لدينا تمثيلان متعاكسان فإنه إذا كانت النقطة بسيطة بالنسبة للتمثيل الأول فإنها ستكون بسيطة بالنسبة للتمثيل الثاني،

وإذا كانت مضاعفة من المرتبة $m$ بالنسبة للتمثيل الأول ستكون مضاعفة من المرتبة $m$ بالنسبة للتمثيل الثاني. (أي لنقاط المجموعة النقطية المشتركة الطبيعة ذاتها بالنسبة للتمثيلين المتعاكسين)

## تمارين وظيفة :

1 أثبت أن العلاقة: $\vec{r}_1 \sim \vec{r}_2 \Longleftrightarrow \exists\, \phi : I_2 \longrightarrow I_1$ { تزايدية تماماً
ومستمرة وعاكسة وتقبل مخطط تبادلي $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \phi$ }
محققة ( أثبت التكافؤ ).

2 أثبت أن للتمثيلين المتكافئين المجموعة النقطية ذاتها أي $\vec{r}_1(I_1) = \vec{r}_2(I_2)$ حيث $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$

3 إذا كانت $P_1, P_2$ نقطتين من المجموعة النقطية المشتركة لتمثيلين متكافئين وكانت :

$$\overrightarrow{OP_1} = \vec{r}_1(t_1) = \vec{r}_2(\tau_1)$$
$$\overrightarrow{OP_2} = \vec{r}_1(t_2) = \vec{r}_2(\tau_2)$$

وكانت $\vec{r}_1(t_1)$ تأتي قبل $\vec{r}_1(t_2)$ فإن $\vec{r}_2(\tau_1)$ ستأتي قبل $\vec{r}_2(\tau_2)$

بمعنى :
أثبت أن للتمثيلين المتكافئين التوجيه ذاته. بمعنى أنهما يزودان المجموعة النقطية المشتركة لهما بالترتيب ذاته.

4 إذا كانت $P$ نقطة مضاعفة من المرتبة $m$ حيث $m \geqslant 1$ ( بسيطة إذا كانت $m = 1$ )
بالنسبة لـ $\vec{r}_1$ بأنها ستكون مضاعفة من المرتبة $m$ بالنسبة لـ $\vec{r}_2$ مع العلم أن $\vec{r}_1$ يكافئ $\vec{r}_2$