الموضوع: تقدير الخطأ المرتكب في حساب الاستيفاء   التاريخ: 2014/2/11

المحاضرة 10

★ مبرهنة: بفرض $y=f(x)$ تابع قابل للاشتقاق $(n+1)$ مرة

حيث:

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	$\dots$	y_n

و $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط الاستيفاء مرتبة تصاعدياً

وليكن $\bar{x} \in [x_0, x_n]$ حيث $\bar{x}$ مختلفة عن $x_0, x_1, \dots, x_n$

ولنضع $w(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

ولتكن $P_n(x)$ حدودية الاستيفاء

للتابع $y=f(x)$ المعرف بالجدول السابق عندئذ الخطأ المرتكب

في حساب $f(\bar{x})$ يعطى بالعلاقة:

الخطأ في حساب $\bar{x}$

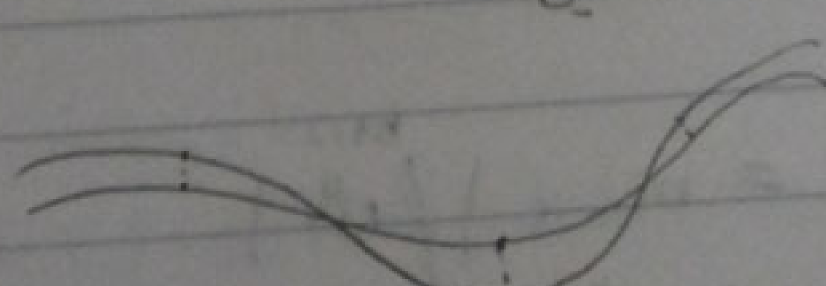
$$|e(\bar{x})| \le \frac{M\cdot|w(\bar{x})|}{(n+1)!}$$

أكبر قيمة خطأ ممكنة

المشتق $(n+1)$

حيث $$M=\max_{x_0\le \mu \le x_n}|f^{(n+1)}(\mu)|$$

يدل على أكبر خطأ بين المنحنيين



الموضوع:

الاثبات: نعلم أن قيمة الخطأ الفعلي هي

$$e(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})$$

نعرف التابع المساعد التالي: ضرورية

نعرف التابع (تختلف هذا الرمز في البرهنة)

$$E(x) = f(x) - P_n(x) - e(\bar{x}) \cdot \frac{\omega(x)}{\omega(\bar{x})}$$

نلاحظ أن التابع $E(x)$ ينعدم عند $(n+2)$ نقطة وهي

$$\{\underbrace{x_0, x_1, \ldots, x_n}_{n+1 \text{ نقطة}}, \bar{x}\}$$

وبالتالي حسب مبرهنة رول

$$\exists \mu \in [x_0, x_n] : E^{(n+1)}(\mu) = 0$$

نشتق التابع $E(x)$ مرة $(n+1)$ فنجد:

$$E^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - (n+1)! \frac{e(\bar{x})}{\omega(\bar{x})}$$

نفرض $x = \mu$ فيكون

$$0 = f^{(n+1)}(\mu) - (n+1)! \frac{e(\bar{x})}{\omega(\bar{x})}$$

ومنه

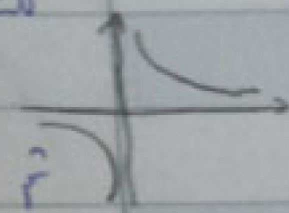
$$e(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\mu) \cdot \omega(\bar{x})}{(n+1)!}$$

نضع

$$M = \max_{x_0 \le \mu \le x_n} |f^{(n+1)}(\mu)|$$

$$|e(\bar{x})| \le \frac{M \cdot |\omega(\bar{x})|}{(n+1)!}$$

تمرين (1): باستخدام طريقة لاغرانج أوجد حدودية بالاستيفاء للتابع $y=f(x)=\frac{1}{x}$ للوصف عند النقاط 4، 2.5، 2
نقاط الارتكاز



ثم احسب بشكل تقريبي $f(3)$ والخطأ المرتكب

الحل: نكتب $f(x)$ عند نقاط الارتكاز:

x	2	2.5	4
$y=f(x)$	0.5	0.4	0.25

نوجد حدوديات لاغرانج:

$$L_0(x)=\frac{(x-2.5)(x-4)}{(-0.5)(-2)}=x^2-6.5x+10$$

إذا كان لديك $\frac{1}{3}$ الأحسن بأن ما تطلع جوابا بشكل عشري

$$L_1(x)=\frac{(x-2)(x-4)}{(0.5)(-1.5)}=\frac{-4}{3}(x^2-6x+8)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-2)(x-2.5)}{(2)(1.5)}=\frac{1}{3}(x^2-4.5x+5)$$

ومنه:

$$P_2(x)=L_0y_0+L_1y_1+L_2y_2$$

$$=(0.5)(x^2-6.5x+10)+\frac{0.4\times-4}{3}(x^2-6x+8)+\frac{0.25}{3}(x^2-4.5x+5)$$

ومنه: $\boxed{P_2(x) = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15}$

كذلك: $f(3) \approx P_2(3) = 0.325$

المشتق الثاني موجب
هنا
المشتق الأول سالب

حساب الخطأ المرتكب نضع:

$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ ، $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ ، $f'''(x) = \frac{-6}{x^4}$

هذه للفهم فقط

$$\boxed{f^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}}$$

ومنه: $M = \max_{2 \le \mu \le 4} |f'''(\mu)| = \frac{6}{(2)^4} = \frac{3}{8}$

إذا أخذنا ال 4 سيصغر المقدار
لذلك أخذنا 2 كونه $\frac{-6}{x^4}$ متناقص

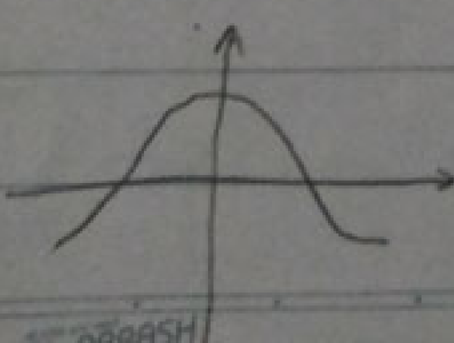
$\omega(3) = (3-2)(3-2.5)(3-4) = -0.5$

ومنه الخطأ

$$|e(3)| \le \frac{\frac{3}{8} \cdot (0.5)}{3!} = \frac{1}{32} = 0.031$$

في الفصل نضع القانون

تمرين 2: باستخدام طريقة لاغرانج أوجد حدودية الاستيفاء للتابع $y = f(x) = \cos x$ الموافق عند النقاط 0 ، 0.1 ، 0.2
ثم احسب بشكل تقريبي $\cos(0.05)$ والخطأ المرتكب.



الحل: نكتب $f(x)$ عند نقاط الاستكمال

الموضوع: التاريخ: / /

x	0	0.1	0.2
$y=f(x)$	1	0.995	0.98

نوجد حدوديات لاغرانج:

$$L_0(x)=\frac{(x-0.1)(x-0.2)}{(0.1)(0.2)}$$

$$\boxed{L_0(x)=50(x^2-0.3x+0.02)}$$

$$\boxed{L_1(x)=\frac{(x)(x-0.2)}{(0.1)(-0.1)}=-100(x^2-0.2x)}$$

$$\boxed{L_2(x)=\frac{x(x-0.1)}{(0.2)(0.1)}=50(x^2-0.1x)}$$

ومنه

$$P_2(x)=L_0y_0+L_1y_1+L_2y_2$$

$$=50(x^2-0.3x+0.02)-99.5(x^2-0.2x)$$
$$+49(x^2-0.1x)$$

ومنه:

$$\boxed{P_2(x)=-0.5x^2+1}$$

$$\cos(0.05)\simeq P_2(0.05)=0.99875$$

وحساب الخطأ:

$f'(x) = -\sin x$ ، $f''(x) = -\cos x$ ، $f''' = \sin x$

ومنه

$M = \max |f'''(\mu)| = \sin(0.2) = 0.1986$ لـ sin متزايد

$0 \le \mu \le 0.2$

$W(0.05) = (0.05 - 0)\cdot(0.05 - 0.1)(0.05 - 0.2) = 0.0003$

$$|e(0.05)| \le \frac{(0.1986)(0.0003)}{3!} = 0.00001$$

نلاحظ الاستكمال قريب من نقاطها فالخطأ صغير

وظيفة: باستخدام الطريقة العامة:

- أوجد حدودية الاستيفاء للتابع $f(x) = e^{x}$ المعرف عند $0 , 1 , 2$ ثم احسب $e^{0.5}$ والخطأ المرتكب

- باستخدام طريقة لاغرانج أوجد حدودية الاستيفاء للتابع $f(x) = \sin x$ المعرف عند $0.1 , 0.2 , 0.3$ ثم احسب $\sin(0.15)$ والخطأ المرتكب

الخطأ سيكون كبير

لما تكون نقاط الاستكمال بعيدة