It can be easily shown that the trace of A is also equal to the sum of the eigenvalues of A counted with their multiplicities as roots of the characteristic polynomial.

Proposition 1.3. *If λ is an eigenvalue of A, then $\bar{\lambda}$ is an eigenvalue of A^H. An eigenvector v of A^H associated with the eigenvalue $\bar{\lambda}$ is called a left eigenvector of A.*

When a distinction is necessary, an eigenvector of A is often called a right eigenvector. Therefore, the eigenvalue λ as well as the right and left eigenvectors u and v satisfy the relations

$$Au = \lambda u, \quad v^H A = \lambda v^H$$

or, equivalently,

$$u^H A^H = \bar{\lambda} u^H, \quad A^H v = \bar{\lambda} v.$$

1.3 Types of Matrices

The choice of a method for solving linear systems will often depend on the structure of the matrix A. One of the most important properties of matrices is symmetry, because of its impact on the eigenstructure of A. A number of other classes of matrices also have particular eigenstructures. The most important ones are listed below:

- *Symmetric matrices:* $A^T = A$.
- *Hermitian matrices:* $A^H = A$.
- *Skew-symmetric matrices:* $A^T = -A$.
- *Skew-Hermitian matrices:* $A^H = -A$.
- *Normal matrices:* $A^H A = A A^H$.
- *Nonnegative matrices:* $a_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, \ldots, n$ (similar definition for nonpositive, positive, and negative matrices).
- *Unitary matrices:* $Q^H Q = I$.

It is worth noting that a unitary matrix Q is a matrix whose inverse is its transpose conjugate Q^H, since

$$Q^H Q = I \quad \rightarrow \quad Q^{-1} = Q^H. \tag{1.1}$$

A matrix Q such that $Q^H Q$ is diagonal is often called orthogonal.

Some matrices have particular structures that are often convenient for computational purposes. The following list, though incomplete, gives an idea of these special matrices, which play an important role in numerical analysis and scientific computing applications.

- *Diagonal matrices:* $a_{ij} = 0$ for $j \neq i$. Notation:

$$A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$

- *Upper triangular matrices:* $a_{ij} = 0$ for $i > j$.
- *Lower triangular matrices:* $a_{ij} = 0$ for $i < j$.

- *Upper bidiagonal matrices:* $a_{ij} = 0$ for $j \neq i$ or $j \neq i+1$.
- *Lower bidiagonal matrices:* $a_{ij} = 0$ for $j \neq i$ or $j \neq i-1$.
- *Tridiagonal matrices:* $a_{ij} = 0$ for any pair i, j such that $|j - i| > 1$. Notation:

$$A = \text{tridiag}(a_{i,i-1}, a_{ii}, a_{i,i+1}).$$

- *Banded matrices:* $a_{ij} \neq 0$ only if $i - m_l \leq j \leq i + m_u$, where m_l and m_u are two nonnegative integers. The number $m_l + m_u + 1$ is called the bandwidth of A.
- *Upper Hessenberg matrices:* $a_{ij} = 0$ for any pair i, j such that $i > j + 1$. Lower Hessenberg matrices can be defined similarly.
- *Outer product matrices:* $A = uv^H$, where both u and v are vectors.
- *Permutation matrices:* the columns of A are a permutation of the columns of the identity matrix.
- *Block diagonal matrices:* generalizes the diagonal matrix by replacing each diagonal entry with a matrix. Notation:

$$A = \text{diag}(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn}).$$

- *Block tridiagonal matrices:* generalizes the tridiagonal matrix by replacing each nonzero entry with a square matrix. Notation:

$$A = \text{tridiag}(A_{i,i-1}, A_{ii}, A_{i,i+1}).$$

The above properties emphasize structure, i.e., the positions of the nonzero elements with respect to the zeros. Also, they assume that there are many zero elements or that the matrix is of low rank. This is in contrast with the classifications listed earlier, such as symmetry and normality.

1.4 Vector Inner Products and Norms

An inner product on a (complex) vector space $\mathbb{X}$ is any mapping s from $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ into $\mathbb{C}$,

$$x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{X} \quad \rightarrow \quad s(x, y) \in \mathbb{C},$$

that satisfies the following conditions:

1. $s(x, y)$ is linear with respect to x; i.e.,

$$s(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 s(x_1, y) + \lambda_2 s(x_2, y) \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{X}, \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

2. $s(x, y)$ is *Hermitian*; i.e.,

$$s(y, x) = \overline{s(x, y)} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{X}.$$

3. $s(x, y)$ is *positive definite*; i.e.,

$$s(x, x) > 0 \quad \forall\, x \neq 0.$$

Note that (2) implies that $s(x, x)$ is real and, therefore, (3) adds the constraint that $s(x, x)$ must also be positive for any nonzero x. For any x and y,

$$s(x, 0) = s(x, 0 \cdot y) = 0 \cdot s(x, y) = 0.$$

Similarly, $s(0, y) = 0$ for any y. Hence, $s(0, y) = s(x, 0) = 0$ for any x and y. In particular condition (3) can be rewritten as

$$s(x, x) \geq 0 \quad \text{and} \quad s(x, x) = 0 \quad \text{iff} \quad x = 0,$$

as can be readily shown. A useful relation satisfied by any inner product is the so-called Cauchy–Schwarz inequality

$$|s(x, y)|^2 \leq s(x, x)\, s(y, y). \tag{1.2}$$

The proof of this inequality begins by expanding $s(x - \lambda y, x - \lambda y)$ using the properties of s:

$$s(x - \lambda y, x - \lambda y) = s(x, x) - \bar{\lambda} s(x, y) - \lambda s(y, x) + |\lambda|^2 s(y, y).$$

If $y = 0$ then the inequality is trivially satisfied. Assume that $y \neq 0$ and take $\lambda = s(x, y)/s(y, y)$. Then, from the above equality, $s(x - \lambda y, x - \lambda y) \geq 0$ shows that

$$\begin{aligned} 0 \leq s(x - \lambda y, x - \lambda y) &= s(x, x) - 2\frac{|s(x, y)|^2}{s(y, y)} + \frac{|s(x, y)|^2}{s(y, y)} \\ &= s(x, x) - \frac{|s(x, y)|^2}{s(y, y)}, \end{aligned}$$

which yields the result (1.2).

In the particular case of the vector space $\mathbf{X} = \mathbb{C}^n$, a *canonical* inner product is the *Euclidean inner product*. The Euclidean inner product of two vectors $x = (x_i)_{i=1,\ldots,n}$ and $y = (y_i)_{i=1,\ldots,n}$ of $\mathbb{C}^n$ is defined by

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i, \tag{1.3}$$

which is often rewritten in matrix notation as

$$(x, y) = y^H x. \tag{1.4}$$

It is easy to verify that this mapping does indeed satisfy the three conditions required for inner products listed above. A fundamental property of the Euclidean inner product in matrix computations is the simple relation

$$(Ax, y) = (x, A^H y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{C}^n. \tag{1.5}$$

The proof of this is straightforward. The *adjoint* of A *with respect to an arbitrary inner product* is a matrix B such that $(Ax, y) = (x, By)$ for all pairs of vectors x and y. A matrix is *self-adjoint*, or Hermitian, with respect to this inner product if it is equal to its adjoint. The following proposition is a consequence of equality (1.5).

المحاضرة الثانية:

"لغة المصفوفة الرابعة"

1.3 أنواع المصفوفات:

إن اختيار الطريقة لحل أنظمة خطية خالباً يستند على بنية المصفوفة A.
واحدة من أهم هذه المصفوفات هي الخاصية المتناظرة وذلك بسبب تأثيرها على البنية الثانية للمصفوفة A.
العديد من أصناف المصفوفات تملك أيضاً هذه البنية الخاصة أهمها في القائمة التالية من الأسفل:

- مصفوفة تناظرية $A^T = A$
- مصفوفة هرمتية $A^H = A$
- مصفوفة تناظرية متخالفة $A^T = -A$
- مصفوفة هرمتية متخالفة $A^H = -A$
- مصفوفة منظمة $A^H A = A A^H$
- المصفوفات الموجبة $a_{ij} > 0$ $i,j = 1 \dots n$ (تعرف بشكل مشابه المصفوفات الغير موجبة و الموجبة و السالبة)
- المصفوفات الواحدية $Q^H Q = I$

إن الملاحظة الهامة أن المصفوفة الواحدية Q هي مصفوفة لكنها تقلب هو معكوس المصفوفة المرافقة.
إن المصفوفة Q التي كقيمة $Q^H Q$ هي مصفوفة قطرية لـ Q مصفوفة متعامدة.
بعض المصفوفات لها بنية خاصة خالباً ما تكون ملائمة للاستخدام الحسابية.
القائمة التالية ولو الأخير كاملة تقطن نكرة على هذه المصفوفات والتي تلعب دور هام في التحليل العددي والتقنيات الحسابية العلمية.

- المصفوفة القطرية:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{for} \quad j \neq i$$

ترميز:

$$A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

المصفوفة المثلثية العليا

$a_{ij} = 0 \quad for \quad i > j$

المصفوفة المثلثية الدنيا

$a_{ij} = 0 \quad for \quad j > i$

ال المصفوفة الخاصة "

- المصفوفة الشريطية العليا

$a_{ij} = 0 \quad for \quad j \neq i \text{ or } j \neq i+1$

- المصفوفة الشريطية الدنيا

$a_{ij} = 0 \quad for \quad j \neq i \text{ or } j \neq i-1$

- المصفوفة مثلثية 3 أقطار

$a_{ij} = 0 \quad for \text{ any pair } i,j \text{ such that } |j-i| > 1$

ترميز:

$A = tridiag(a_{i,i-1}, a_{ii}, a_{i,i+1})$

- المصفوفات المطوقة، كل حد دليله i,j يحقان العلاقة السابقة يكونهما معدومان حيث m و n أعداد صحيحة موجبة.

العدد $m! + m_{u+1}$ يمثل رتبة المصفوفة A.

- upper Hessenberg matrices and lower Hessenberg matrices
- مصفوفات الجداء الخارجي $A = u v^T$ عندما يكون u و v أشعة.
- مصفوفات الانتقال: أعمدة A هي انتقال لأعمدة المصفوفة الواحدية.
- المصفوفة الكتلية القطرية: تتم المصفوفة القطرية باستبدال كل عنصر في القطر بمصفوفة.
- المصفوفة tridiagonal: هي تعميم للمصفوفات tridiagonal باستبدال كل عنصر في مصفوفة مربعة.

الخواص التي في الأعلى تؤكد السابق.

تدعى مواقع العناصر الغير صفرية بالنسبة للعناصر الصفرية.

أيضاً، لم نميز فيما إذا كان هناك العديد من العناصر الصفرية أو المصفوفة ذات رتبة منخفضة.

هذه بالمقارنة مع التطبيقات الباكرة كالتاطرية والناظمية.

1.6 مضادات الجداء الداخلي والنظم:

الجداء الداخلي هو مضاد سلمي لعنصرين x من تطبيق s من الجداء الديكارتي

$X \times X$ إلى $\mathbb{K}$

$$x \in X, y \in X \longrightarrow s(x,y) \in \mathbb{K}$$

والذي يحقق الشروط التالية:

1- $s(x,y)$ خطي بالنسبة للمركبة الأولى:

$$s(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 (x_1, y) = \lambda_1 s(x_1, y) + \lambda_2 (x_2, y) \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

2- $s(x,y)$ هرميتي للمركبة الثانية توضيح:

$$s(y,x) = \overline{s(x,y)} \qquad \forall x, y \in X$$

3- $s(x,y)$ موجب تماماً: توضيح.

$$s(x,x) > 0 \qquad \forall x \neq 0$$

"الصفة السادسة":

لقد أثبت الشرط الثاني بديلاً عن أن المقدار $s(x,x)$ هو مقدار حقيقي ولكن الشرط الثالث (3) يضيف أن المقدار $s(x,x)$ كي أن يكون أيضاً موجب تماماً من أجل أي عنصر غير معدوم x، من أجل أي x و y.

$$s(x,) = s(x, 0.y) = 0.s(x,y) = 0$$

بشكل مشابه $s(0,y) = 0$ من أجل أي y، من هنا، $s(y,y) = s(x,0) = 0$ من أجل أي x و y في الحالة (3) نكون أن نكتب.

$$s(x,x) \geq 0 \text{ and } s(x,x) = 0 \quad \text{iff} \quad x = 0$$

كما أنه من الواضح بسهولة، علاقة مفيدة محققة من أجل أي جداء داخلي تدعى متراجحة كوشي شفارتز.

$$|s(x,y)|^2 \leq s(x,x) \cdot s(y,y)$$

إثبات هذه المتراجحة تبدأ بتوزيع المقدار $s(x-\lambda y, x-\lambda y)$ باستخدام خواص التطبيق s.

$$s(x-\lambda y, x-\lambda y) = s(x,x) - \bar{\lambda} s(x,y) - \lambda s(y,x) + |\lambda|^2 s(y,y)$$

إذا كان $y = 0$ عندها المتراجحة محققة وصفرية.

اثبت ان $\lambda = \frac{\langle x,y \rangle}{\|y\|^2}$ عندما $y \neq 0$ حيث λ عدد حقيقي

$$\langle x-\lambda y, x-\lambda y \rangle \geq 0$$

تبين ان:

$$\langle x-\lambda y, x-\lambda y \rangle = \langle x,x \rangle - \frac{2|\langle x,y \rangle|^2}{\langle y,y \rangle} + \frac{|\langle x,y \rangle|^2}{\langle y,y \rangle}$$

$$= \langle x,x \rangle - \frac{|\langle x,y \rangle|^2}{\langle y,y \rangle}$$

والذي يعطي النتيجة 1.2

من الحالة الخاصة التي نكون فيها الضرب الداخلي هو حاصل الضرب الداخلي القياسي هو الجداء الداخلي الاعتيادي.

الجداء الداخلي الاعتيادي لمتجهين من الفضاء الشعاعي $\mathbb{C}^n$ يعرف بالشكل

$$\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i \quad (1.1)$$

والذي عالبا ما يعاد كتابته بشكل ضرب مصفوفة بالشكل

$$\langle x,y \rangle = y^H x \quad (1.2)$$

من السهل ان نتحقق أن هذا النتيجة في الصيغة تحقق الشروط الثلاثة الأولى من الجداءات الداخلية المذكورة في بداية هذا الفصل.

الخاصة الأساسية للجداء الداخلي الاعتيادي من الخاصيات المصفوفة هي العلاقة التالية:

$$\langle Ax,y \rangle = \langle x, A^H y \rangle \quad \forall x,y \in \mathbb{C}^n \quad (1.3)$$

اثبات هذا الشكل مباشر.

المصفوفة المرافقة المصفوفة A وفق جداء داخلي اعتيادي هي مصفوفة وحيدة

$$\langle Ax,y \rangle = \langle x, By \rangle \quad (1.4)$$

من أجل أي متجهين x,y.

تكون المصفوفة مساوية لمرافق منقولها بالنسبة لهذا الجداء الداخلي أو كانت متناظرة مرافقاً. الخاصة التالية هي نتيجة المباشرة لـ (1.3)