المحاضرة 16

ثالثاً: بفرض $f(x,y)$ ، $g(x,y)$ تابعان قابلان للاشتقاق ومشتقات الجزئية بالنسبة للمتحولات x, y

ولنكتب $x = F(x,y)$ ، $y = G(x,y)$.
ونفرض A جوار ما للجذر $(\bar{x},\bar{y})$ ونفرض (x_0,y_0) نقطة من هذا الجوار عندئذٍ إذا تحقق الشرط التالي:

$$\exists\ 0 < k < 1 \quad :$$

$$|F_x| + |F_y|\,(x_0,y_0) \le k$$

$$|G_x| + |G_y|\,(x_0,y_0) \le k$$

عندئذٍ: الحل المشترك للجملة $(*)$ انطلاقاً من النقطة (x_0,y_0) حسب طريقة التكرار، نعطى بالقوانين التكرارية التالية:

الخط: $\boxed{x_{n+1} = F(x_n,y_n) \quad , y_{n+1} = G(x_n,y_n)}$

بفرض ε الدقة المطلوبة عندئذٍ نتوقف عن التكرار عندما

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon \quad , |y_n - y_{n-1}| < \varepsilon$$

ويكون

$$(x_n,y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (\bar{x},\bar{y})$$

تمرين (1): باستخدام طريقة التكرار وانطلاقاً من النقطة (0.5 ،0.5)
أوجد حل مشترك تقريبي للجملة.

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0$$
$$g(x,y) = x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0$$

بدقة $\varepsilon = 0.005$

الحل: نكتب المعادلتين على الشكل:

$$x = F(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{6} + \frac{1}{2}$$

$$y = G(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{6} + \frac{1}{3}$$

نلاحظ أن:

$$F_x = \frac{x^2}{2} \qquad F_y = \frac{y^2}{2}$$

$$G_x = \frac{x^2}{2} \qquad G_y = \frac{-y^2}{2}$$

$$|F(x)| + |F(y)| (x_0, y_0) = \frac{(0.5)^2}{2} + \frac{(0.5)^2}{2} = 0.25 < 1$$

$$|G_x| + |G_y| (x_0, y_0) = \frac{(0.5)^2}{2} + \frac{(0.5)^2}{2} = 0.25 < 1$$

ومنه يوجد جذر للمعادلة وليكن $(\bar{x}, \bar{y})$

الجذر موجود جوار النقطة

أي $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (0.5325, 0.3511)$$

AL AKRASH

$$(x_0, y_0) = (0.5, 0.5) \Rightarrow$$

$$x_1 = F(x_0, y_0) = \frac{x_0^3 + y_0^3}{6} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{(0.5)^3 + (0.5)^3}{6} + \frac{1}{2} = 0.5416}$$

$$y_1 = F(x_0, y_0) = \frac{x_0^3 - y_0^3}{6} + \frac{1}{3}$$

$$\boxed{y_1 = \frac{(0.5)^3 - (0.5)^3}{6} + \frac{1}{3} = 0.3333}$$

$$(x_1, y_1) = (0.5416, 0.3333)$$

$$\boxed{x_2 = \frac{(0.5416)^3 + (0.3333)^3}{6} + \frac{1}{2} = 0.5326}$$

$$\boxed{y_2 = \frac{(0.5416)^3 - (0.3333)^3}{6} + \frac{1}{3} = 0.3536}$$

$$(x_2, y_2) = (0.5326, 0.3536)$$

$$x_3 = \frac{(0.5326)^3 + (0.3536)^3}{6} + \frac{1}{2} = 0.5325$$

$$y_3 = \frac{(0.5326) - (0.3536)^3}{6} + \frac{1}{3} = 0.3511$$

$|x_3 - x_2| = 0.0001 < \varepsilon$

$|y_3 - y_2| = 0.0025 < \varepsilon$

$(\bar{x}, \bar{y}) \simeq (x_3, y_3) = (0.5325 , 0.3511)$

تحقق:

$F(x_3, y_3) = 0.0007 \quad , g(x_3, y_3) = 0.0011$

تمرين (2): باستخدام طريقة التكرار وانطلاقاً من النقطة (1.5 , 2) أوجد حل مشترك تقريبي للجملة:

$F(x,y) = e^{x} - y = 0$

$g(x,y) = x.y - e^{x} = 0$

بدقة $\varepsilon = 0.01$

الجذر الفعلي (1,e) إذا استطعنا أن نجده يخلينا نعرف إذا شغلنا صح أم غلط

الحل: نكتب المعادلتين بالشكل:

$y = G(x) = e^{x} \qquad , x = F(x,y) = \frac{e^{x}}{y}$

$F_x = \frac{e^{x}}{y} \quad , F_y = \frac{-e^{x}}{y^2}$

$G_x = e^{x} \quad , G_y = 0$

$\Rightarrow$ $|F_x| + |F_y| (x_0, y_0) = 3.3612$

$|G_x| + |G_y| (x_0, y_0) = 4.481$

كلاهما أكبر من الواحد ومنه اختيار التوابع F, G غير موفق

هنا طلع معنا أكبر من الواحد أي الاختيار خاطئ

AL ABRASH

الموضوع:

$$x = F(x,y) = \ln y$$

$$y = G(x,y) = \frac{e^x}{x}$$

$$F_x = 0 \quad , F_y = \frac{1}{y}$$

$$G_x = \frac{x e^x - e^x}{x^2} \quad , G_y = 0$$

$$|F_x| + |F_y| \, (x_0, y_0) = \frac{1}{2} = 0.5 < 1$$

$$|G_x| + |G_y| \, (x_0, y_0) = \frac{(1.5)e^{(1.5)} - e^{(1.5)}}{(1.5)^2} = 0.9959 < 1$$

ومنه يوجد حل للمعادلة الجملة $(\bar{x}, \bar{y})$

$$(x_0, y_0) = (1.5, 2) \Longrightarrow$$

$$x_1 = F(x_0, y_0) = \ln y_0 = 0.6931$$

$$y_1 = G(x_0, y_0) = \frac{e^{x_0}}{x_0} = 2.9877$$

$$(x_1, y_1) = (0.6931, 2.9877)$$

$$(x_2, y_2) = (1.0945, 2.8854)$$

$$(x_3, y_3) = (1.0596, 2.7297)$$

$$(x_4, y_4) = (1.0041, 2.7229)$$

الموضوع: التاريخ: / /

$(x_5, y_5) = (1.0016, 2.7183)$

نلاحظ أن $|x_5 - x_4| = 0.0025 < \varepsilon$

$|y_5 - y_4| = 0.0046 < \varepsilon$

ومنه

$(\bar{x}, \bar{y}) \simeq (x_5, y_5) = (1.0016, 2.7183)$

نيوتن العامة يطلق أيضاً سريع ومتسرع

نلاحظ أن :

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} (1, e)$$

وظيفة :

$F(x, y) = x - \sin y = 0$ 25 علامة كله

$g(x, y) = y - \cos x = 0$

انطلاقاً من $(1, 1)$ بدقة $\varepsilon = 0.015$

طريقة نيوتن — نيوتن المبسطة - التكرار