المحاضرة الرابعة:

تعريف: (العنصرين المتقارنين):

لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً، $a, b \in P$ نقول عن العنصرين a, b إنهما متقارنين إذا حققا: إما: $a \leq b$ أو $b \leq a$

تعريف: (المجموعة المرتبة كلياً):

نقول عن المجموعة المرتبة جزئياً إنها مرتبة كلياً إذا كان كل عنصرين فيها متقارنين.

ومن الأمثلة على ذلك مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

$0 < 1 < 2 < \dots < n$

تمهيد: لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة كلياً، ولتكن $a \in P$ عندئذ:

العنصر a هو عنصر أصغر (أكبر) في P $\Leftrightarrow$ العنصر a هو عنصر أصغري (أعظمي) في P.

الإثبات:

$(\Leftarrow)$: واضح

$(\Rightarrow)$: لنفرض أن العنصر a أصغري ولتكن: $x \in P$.

عندئذٍ بما أنَّ $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة كلياً فإنَّ:

إما $a \leq x$ أو $x \leq a$.

. في حال كانت: $a \leq x$ يتم المطلوب.

. وفي حال كانت $x \leq a$ فإنَّ $a = x$ (وذلك لأن العنصر a أصغري) ومنه نجد أنَّ العنصر a أصغر.

تعريف: لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً، A مجموعة غير خالية وجزئية في P.

نقول عن العنصر $a \in P$ إنه حد أعلى للمجموعة A إذا حقق الشرط:

$$\forall x \in A \; ; \; x \leq a$$

ونقول عن العنصر $b \in P$ إنه حد أدنى للمجموعة A إذا حقق الشرط:

$$\forall x \in A \; ; \; x \geq b$$

تمهيدية زورن: لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً
إذا كانت كل مجموعة جزئية في P وغير خالية ومرتبة كلياً تملك حد
أدنى (أعلى) عندئذ: يوجد في المجموعة P عنصر أصغري (أعظمي)
واحد على الأقل.

موضوعة الاختيار: لتكن B مجموعة غير خالية عندئذ يوجد تطبيق

$$f: S(B)\setminus\emptyset \longrightarrow B$$

$$\forall A \in S(B)\setminus\emptyset : f(B) \in A$$

حيث $S(B)$ مجموعة الأجزاء الجزئية من المجموعة B.

قدرة مجموعة والمجموعات المتساوية القدرة:

تعريف: (قدرة المجموعة المنتهية): هو عدد طبيعي يدل على عدد عناصر المجموعة.
(قدرة المجموعة الغير منتهية): هو رمز يدل على كمية العناصر في هذه المجموعة.
نرمز لقدرة المجموعة A بالرمز $card\ A$، رئيسي (عدد عناصر) المجموعة A.

تعريف: لتكن B، A مجموعات نقول أنّ:

$$card\ A = card\ B \Leftrightarrow \exists f: A \to B \vee f: B \to A$$ تقابل

ونرمز للمجموعات المتساويات القدرة A، B بالشكل: $A \sim B$.

وظيفة: لتكن Σ مجموعة من القدرات أثبت أن العلاقة $(\sim)$ المعرفة على القدرات هي علاقة تكافؤ على Σ وعين صفوف تكافؤ هذه العلاقة.

الحل:

. لتكن لدينا المجموعة A عندئذ: $card\ A \in \Sigma$

. نعلم أنّ: $card\ A = card\ A$ ومنه: $A \sim A$

وبالتالي: $\sim$ انعكاسية.

لتكن لدينا المجموعتين A ، B عندئذ : $card A \in \Sigma, card B \in \Sigma$

ولنفرض أن: $A \sim B$ عندئذٍ :

$\exists f : A \longrightarrow B$ تقابل

وبالتالي فإن: $f : B \longrightarrow A$ تقابل.

ومنه: $B \sim A$

ومنه: $\sim$ تناظرية.

لتكن لدينا المجموعات A, B, C عندئذٍ $card A \in \Sigma, card B \in \Sigma, card C \in \Sigma$

نفرض أن: $A \sim B$ ومنه: $\exists f : A \longrightarrow B$ تقابل

$B \sim C$ ومنه: $\exists g : B \longrightarrow C$ تقابل

وبالتالي فإن: $g \circ f : A \longrightarrow C$ تقابل.

ومنه: $A \sim C$

ومنه: $\sim$ متعدية.

مما سبق نجد أنَّ: $\sim$ علاقة تكافؤ على Σ.

بقي إيجاد صفوف تكافؤ هذه العلاقة.

ملاحظة: يرجى التأكد من صحة الحل.

تعريف: ليكن A ، B مجموعتين نقول أنَّ:

$card A \leq card B \Longleftrightarrow \exists f : A \longrightarrow B$ متباين.

وظيفة: لتكن Σ مجموعة من القدرات أثبت أن العلاقة ($\leq$) المعرفة على القدرات هي علاقة ترتيب جزئي على Σ.

الحل:

لتكن لدينا المجموعة A عندئذٍ: $card A \in \Sigma$.

إنَّ: $card A \leq card A$.

ومنه العلاقة: $\leq$ انعكاسية.

. لتكن لدينا المجموعتين A و B عندئذ: $card A \in \Sigma, card B \in \Sigma$
بفرض أن: $card A \leq card B$ ومنه: $\exists f: A \longrightarrow B$ متباين.
ومنه: $card B \leq card A$ $\exists g: B \longrightarrow A$ متباين.
وبالتالي وُجد تطبيق: $f: A \to B$ متباين وآخر: $g: B \to A$ متباين
وحسب مبرهنة (كانتور برنشتاين) فإن:

$$card A = card B$$

ومنه $\leq$ تخالفية.

. لتكن لدينا المجموعات: A, B و C بحيث: $card A \in \Sigma, card B \in \Sigma, card C \in \Sigma$
بحيث:
ومنه: $card A \leq card B$ $\exists f: A \longrightarrow B$ متباين
ومنه: $card B \leq card C$ $\exists g: B \longrightarrow C$ متباين
وبالتالي فإن:

$g \circ f: A \longrightarrow C$ متباين.

ومنه: $card A \leq card C$.

ومنه: $\leq$ متعدية.
مما سبق نجد أن العلاقة ($\leq$) هي علاقة ترتيب جزئي على Σ
ملاحظة: يرجى التأكد من صحة الحل.

مبرهنة (كانتور برنشتاين):
. لتكن A, B مجموعات إذا وجد تطبيق متباين: $f: A \longrightarrow B$
وتطبيق متباين آخر: $g: B \longrightarrow A$ عندئذ يكون:

$$card A = card B$$

. نرمز لقدرة مجموعة الأعداد الطبيعية بالشكل $\aleph_0$ ونقرأ ألف صفر
. نرمز لقدرة مجموعة الأعداد الحقيقية بالشكل: $\aleph$ ونقرأ ألف.
. ترتيب القدرات للمجموعات المنتهية، ~~[illegible]~~ كرتب في سلسلة
من الشكل: ~~[illegible]~~

$$0 < 1 < 2 < 3 < \cdots < \aleph_0 < \cdots < \aleph$$

مبرهنة: لتكن A مجموعة ما، و $P(A)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية من A عندئذٍ:

$$\text{card } A < \text{card } P(A)$$

الإثبات:

1- إذا كانت $A = \phi$ عندئذٍ: $\text{card} A = 0 < 1 = \text{card} P(A)$

2- $A \neq \phi$. لنعرف العلاقة: $f : A \longrightarrow P(A)$

$$\forall a \in A \quad f(a) = \{a\} \in P(a)$$

• من الواضح أن التطبيق f متباين وذلك لأنّ:

$$\forall\, a, b \in A \;;\; a = b \Leftrightarrow \{a\} = \{b\} \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$

• وبما أنّ التطبيق متباين فحسب التعريف:

$$\text{card } A \leq \text{card } P(A)$$

• لنفرض جدلاً أنّ: $\text{card } A = \text{card } P(A)$ وحسب التعريف يوجد تقابل: $g : A \longrightarrow P(A)$

• ولنأخذ المجموعة:

$$H = \{a : a \in P \;,\; a \notin g(a)\} \in P(A)$$

• إن المجموعة H جزئية في A وغير خالية لأنه إذا كانت $H = \phi$ $\in P(A)$ عندئذٍ (لكون g غامر):

يوجد $b \in A$ بحيث: $g(b) = H$ ومنه حسب تعريف المجموعة H فإن: $b \in g(b) = H = \phi$ وهذا غير ممكن.

ومنه $H \neq \phi$.

• بما أن $H \in P(A)$ عندئذٍ يوجد $d \in A$ بحيث $g(d) = H$ ونميز حالتين:

1) $d \in H$ عندئذٍ: $d \notin g(d) = H$ وهذا غير ممكن.

2) $d \notin H$ عندئذٍ: $d \in g(d) = H$ وهذا غير ممكن.

ومما سبق نجد أنّ الفرض: $\text{card } A = \text{card } P(A)$ غير ممكن ومنه.

$$\text{card } A < \text{card } P(A)$$

ملاحظة: مجموعة القدرات للمجموعات هي مجموعة مرتبة كلياً بالنسبة لعلاقة ($\leq$) المعرفة على القدرات.

تمرين: أثبت أن: $\text{card}\,\mathbb{Z} = \text{card}\,\mathbb{N}^*$ أي يجب علينا أن نجد تطبيق تقابل بينهما.

الحل:

• لنعرف العلاقة: $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}^*$ بالشكل التالي:

$$\forall n \in \mathbb{Z}: f(n) = \begin{cases} 2n+1 & : n \geq 0 \\ 2|n| & : n < 0 \end{cases}$$

• إن $\boxed{f \text{ تطبيق}}$ أي أنه:

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}: n = m \Rightarrow f(n) = f(m)$$

ولنبين ذلك:

• لنفرض أن $m = n$ عندئذ:

• إما: $n, m \geq 0$ وفي هذه الحالة:

$$2n+1 = 2m+1 \Rightarrow f(n) = f(m)$$

• أما إذا كان: $n, m < 0$ عندئذ:

$$n = m \Rightarrow |n| = |m| \Rightarrow 2|n| = 2|m|$$
$$\Rightarrow f(n) = f(m).$$

• إن $\boxed{f \text{ متباين}}$ لأنه إذا كان $n, m \in \mathbb{Z}$ بحيث:

$$f(n) = f(m)$$

فإن: $n = m$,

• إذا كان: $n, m \geq 0$

$$f(n) = f(m) \Rightarrow 2n+1 = 2m+1$$
$$\Rightarrow 2n = 2m \Rightarrow n = m$$

• إذا كان: $n, m < 0$ عندئذ

$$f(n) = f(m) \Rightarrow 2|n| = 2|m| \Rightarrow -n = -m \Rightarrow n = m$$

• إذا كان $n \geq 0$, $m < 0$ عندئذ:

$$f(n) = f(m) \Rightarrow 2n+1 = -2m$$
$$\Rightarrow 2(n+m) = -1 \Rightarrow n+m = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

وهذا غير ممكن. ومنه الحالة الأخيرة لا يمكن أن تكون موجودة، ومما سبق يكون f متباين.

. إن التطبيق f غامر لأنه إذا كان $n \in \mathbb{N}^*$ فإننا نميز حالتين

. إذا كان n زوجي عندئذ $-n \in \mathbb{Z}$

$$-\frac{n}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow f\left(-\frac{n}{2}\right) = 2\left|-\frac{n}{2}\right| = 2\frac{n}{2} = n$$

. إذا كان n فردي عندئذ $(n-1)$ زوجي ومنه

$$\frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}$$

$$f\left(\frac{n-1}{2}\right) = 2\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 = n-1+1 = n$$

ومما سبق نجد أن التطبيق f غامر وبالتالي تقابل ومنه يكون: $\mathrm{card}\,\mathbb{Z} = \mathrm{card}\,\mathbb{N}^*$

ملاحظة: نقول عن المجموعة A إنها قابلة للعد إذا كانت:

$$\mathrm{card}\,A = \mathrm{card}\,\mathbb{N}$$

انتهت المحاضرة الرابعة.

بعض التوضيحات من مادة المحاضرة :

تذكرة : مجموعة أجزاء مجموعة :

لتكن : $A \neq \phi$ ونرمز بـ : $P(A)$ لمجموعة كل المجموعات الجزئية من A "أو مجموعة أجزاء A".

مثال : لتكن المجموعة : $A = \{1, 2, 3\}$ فإن :

$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$

بعض الأمثلة عن علاقة الترتيب :

مثال : (1). لتكن لدينا : $A = \{1, 2, 3\}$ عندئذٍ :

$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$

إن : $(P(A), \subset)$ مجموعة مرتبة جزئياً

لأن علاقة الاحتواء $\subset$ هي علاقة ترتيب على $P(A)$ والتحقق وا...

وهي علاقة ترتيب جزئي لأن العنصرين مثلاً :

$\{2\}$, $\{1\}$

غير متقارنين. لأنه لا يمكن أن تكون المجموعة $\{1\}$ محتواة في $\{2\}$.

مثال : (2). إن $(\mathbb{N}, \leq)$ ، $(\mathbb{R}, \leq)$ ، $(\mathbb{Z}, \leq)$ هي مجموعات مرتبة كلياً

ونلاحظ أنه في المجموعة $(\mathbb{N}, \leq)$ العنصر الأصغر والأص...

الوحيد هو 0.

ملاحظة :

في مثال (1) نلاحظ أن : A هو العنصر الأكبر والأعظمي الوحيد في $P(A)$

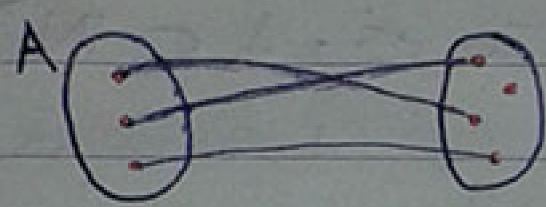
وأن : ϕ هو العنصر الأصغر والأصغري الوحيد في $P(A)$

ملاحظات: لتكن لدينا A ، B وليكن:

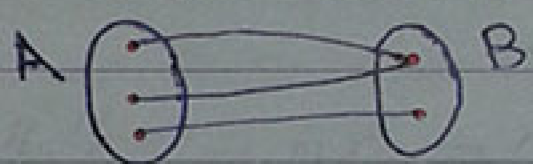
$f : A \longrightarrow B$ تطبيق ما

عندئذٍ:

(1. $\text{card}\, A \leq \text{card}\, B \iff f$ متباين أي أنّ: «لكل عنصرين مختلفين من المنطلق فإنّ صورتيهما وفق f مختلفتين»



(2. $\text{card}\, B \leq \text{card}\, A \iff f$ غامر أي أنّ: «كل عنصر من المستقر يرتبط بعنصر واحد على الأقل من المنطلق»



(3. $\text{card}\, A = \text{card}\, B \iff f$ تقابل أي أنّ: «كل عنصر من المستقر يرتبط بعنصر واحد فقط من المنطلق»