الثلاثاء: 21/10/2014

الحاضرة الرابعة:

صنف الدوال C_m: حيث m عدد طبيعي $(m \geq 1)$

نقول عن دالة سلمية (حقيقية) أو عن دالة متجهية القيمة إنها من الصنف C_m في مجال مفتوح $I \subseteq \mathbb{R}$ إذا كان المشتق من المرتبة m لتلك الدالة موجوداً أو مستمراً على I

(مشتق دالة من المرتبة 0 هو الدالة ذاتها)

- سنرمز لصنف الدوال المستمرة بالرمز C_0.
- سنرمز لصنف الدوال التي لها عدد غير منته من المشتقات بـ C_∞
- إذا كان لدينا دالة متجهية القيمة $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ من الصنف C_m في المجال I $\Leftrightarrow$ $x(t), y(t), z(t)$ من الصنف C_m على I.

مثال:

لتكن الدالة:

$$\vec{r}(t) = (\underset{C_\infty}{\underset{\cap}{t^3}} + 2t + 1, \underset{C_\infty}{\underset{\cap}{\cos t}}, \underset{C_\infty}{\underset{\cap}{e^t}})$$

كل المركبات من الصنف C_∞ فالدالة متجهية القيمة من الصنف C_∞

ملاحظة: العلاقة بين الصنوف

$$C_\infty \subseteq \cdots \subseteq C_s \subseteq C_r \subseteq \cdots \subseteq C_2 \subseteq C_1 \subseteq C_0$$

$$\forall s \geq r$$

أوسع الصنوف C_0 وأضيق الصنوف C_∞

- إذا كانت الدالة من الصنف C_9 فهي من الصنف C_8 و C_7 ...

- نقول عن دالة إنها من الصنف C_m عند النقطة t_0 (في جوار t_0) إذا كانت من الصنف

C_m في جوار لـ t_0 (مثل الجوار $]t_0-\delta, t_0+\delta[$)

خواص:

① لتكن الدالتين المتجهتين $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ والدالة السلمية h ثلاث دوال من الصف C_m.

عندئذٍ الدوال:

$$\vec{r}_1+\vec{r}_2 \quad , \quad \vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 \quad , \quad \vec{r}_1\times\vec{r}_2 \; , \; h\vec{r}_1 \quad \in C_m$$

جميعها تنتمي للصف C_m

مثال: $\vec{r}$ دالة متجهة h دالة سلمية

$$e^{t}\,(t^2, \cos t, \sin t)$$

C_∞ على R $\qquad$ C_∞ على R

بأن الدالة $h\vec{r}$ من الصف C_∞ على R.

② إذا كان $\vec{r}_1$ دالة متجهية و h دالة سلمية بحيث:

$$\vec{r}_1 : h(I_1) \subseteq I_2 \subseteq I_3 \longrightarrow R \; , \; h : I_1 \longrightarrow I_2$$

$$\vec{r}_1 \circ h$$

من الصف C_m على $h(I_1)$ $\qquad$ من الصف C_m على I_1

فإن $\vec{r}_1 \circ h$ من الصف C_m على المجال I_1

مثال:

$h : R \longrightarrow (0,\infty)$ دالة سلمية من الصف C_∞ على R.

$$s \longmapsto h(s) = e^{s}$$

$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, \ln t)$ دالة متجهية من الصف C_∞ على $h(R) = (0,\infty)$

{ إن مجموعة تعريف دالة متجهية القيمة مساوية لتقاطع مجموعات تعريف مركباتها

وبما أن $\cos t, \sin t$ منطلقة R و $\ln t$ منطلقة $(0,\infty)$

فيكون منطلق الدالة $\vec{r}(t)$ هو $h(R) = (0,\infty)$ }

$$\vec{r} \circ h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\vec{r} \circ h)(s) = \vec{r}(h(s))$$

$$= \vec{r}(e^s)$$

$$= (\cos e^s, \sin e^s, \ln e^s = s)$$

من الصنف C_∞ على $\mathbb{R}$ الصنف C_∞ على $\mathbb{R}$ من الصنف C_∞ على $\mathbb{R}$.

وبالتالي الدالة $\vec{r} \circ h$ من الصنف C_∞ على المجال $\mathbb{R}$.

ملاحظات:

1- لا يمكن أن تكون مجموعة قابلية الاشتقاق أوسع من مجموعة التعريف.
مثلاً لو كانت المركبة الثالثة في المثال السابق $e^{\ln s}$ فتكون غير معرفة لأجل الأعداد السالبة
وبالتالي $e^{\ln s} \neq s$ إلا إذا كان $s > 0$ وذلك $\forall s$
وفي هذه الحالة تكون من الصنف C_∞ على $]0,\infty[$

2. مشتق الثابت يساوي الصفر دوماً.
أما إذا كان مشتق الدالة صفر فليس بالضرورة أن تكون الدالة ثابتة.
فإذا كان مشتق الدالة صفر على مجال فتكون الدالة ثابتة على ذلك المجال أما إذا كان مشتق الدالة صفر على اجتماع مجالين فلا تكون الدالة ثابتة.
بمعنى: إذا كان مشتق الدالة صفر فتكون الدالة ثابتة على مجموعة مترابطة.

3. إذا كان لدينا دالتين ($\vec{r}_1, \vec{r}_2$) أحدهما من الصنف C_s والأخرى من الصنف C_r فإن جميع الدوال

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 , \quad \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 , \quad \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 , \quad h\vec{r}_1$$

(سلمية)

من الصنف s إذا كان $s < r$.

(تتمة الخاصة ١)

قابل للاشتقاق مرة $\longleftarrow$ قابل للاشتقاق أكثر من مرة

التوابع التحليلية:

لتكن $\vec{r}$ دالة من الصف C_∞ على المجال I و m عدد صحيح موجب، بما أن الدالة من الصف C_∞ فهي من الصف C_m وبالتالي نستطيع أن نكتب:

نشر تايلور المحدود لـ $\vec{r}$ عند t_0 من المرتبة m:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \frac{\vec{r}'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{\vec{r}''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + --- + \frac{\vec{r}^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m$$

$$+ \vec{R}_{m+1}(t,t_0)$$ {عندما نفرض أن $(t = t_0 + h)$ نحصل على شكل منشور تايلور بالمحاضرة السابقة}

منشور الدالة من الصف C_m ⇐ له $(m+1)$ مشتق مستمر.

حيث:
$$\lim_{t\to t_0} \frac{\vec{R}_{m+1}(t,t_0)}{(t-t_0)^m} = \vec{0}$$

شرط إضافي: إذا كانت $\lim_{m\to\infty} \vec{R}_{m+1}(t,t_0) = \vec{0}$

تذكرة:

لتكن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{v}_n$

$$\vec{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \vec{v}_k = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 + -- - + \vec{v}_n$$

هذه المتسلسلة متقاربة ومجموعها يساوي الشعاع $\vec{S}$ إذا كان

$$\lim_{n\to\infty} \vec{S}_n = \vec{S}$$

إذاً إذا تحقق هذا الشرط الإضافي نستطيع أن نكتب التالي:

تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{r}^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n$ متقاربة ومجموعها:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \frac{\vec{r}'(t_0)}{1!}(t-t_0) + --- + \frac{\vec{r}^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + --$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{r}^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n \qquad \forall\, t, t_0 \in I$$

وهي متسلسلة تايلور لدالة متجهية القيمة.

عندئذ نقول إن الدالة $\vec{r}$ تحليلية في I {وهذا تعريف الدالة التحليلية عندما تكون هذه الدالة من الصف C_∞}

أي أن الدالة التحليلية هي مجموع لمتسلسلة قوى في جوار كل نقطة من نقاط المجال I.
مثلا أكثر عمومية (أي دون شروط)

تعريف الدالة التحليلية:
تكون الدالة $\vec{r}$ تحليلية في مجال I إذا وجد من أجل كل $t_0 \in I$، جوار $]t_0-\delta, t_0+\delta[$
بحيث تكون:
$$\vec{r}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{a}_n (t-t_0)^n \quad ; \quad \forall t \in]t_0-\delta, t_0+\delta[$$

- يبرهن أنه إذا كانت $\vec{r}$ تحليلية فإن تكون من الصنف C^∞ (ستكون لا عدد غير منته من المشتقات) ويكون:
$$\vec{a}_n = \frac{\vec{r}^{(n)}(t_0)}{n!}$$

ملاحظات:
1. مشتق مجموع منتهي يساوي مجموع المشتقات ولكن مشتق مجموع ليس بالضرورة يساوي مجموع المشتقات.
2. يوجد دوال من الصنف C^∞ وليست تحليلية.
- وظيفة:
- هات مثال:

3. نرمز لصنف التوابع التحليلية (Analytic Function) بـ C_A أو C_ω

4. $\sin x, \cos x, e^x, \ldots$ تحليلية دوما على R (لأنها تكتب على شكل مجموع متسلسلة قوى).
مثلا: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$