الأحد : 19/10/2014

المحاضرة الثالثة :

طول متجه بدلالة المركبات :

ليكن المتجه $\vec{u}$ مركباته $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ، إنّ طول المتجه $\vec{u}$ هو طول القطعة المستقيمة الممثلة لهذا المتجه ويعطى بالعلاقة :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

متجه الموضع :

نأخذ p نقطة من الفضاء الثلاثي المزود بالجملة $oxyz$ فيعتبر المتجه $\vec{op}$ هو متجه طلق ممثله المتجه المقيد $\vec{op}$ ، وبما أنّ الفضاء مزود بالجملة $oxyz$ فإنّ هذا المتجه يُكتب على شكل مركبات :

$$\vec{op} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

نقول عن $\vec{op} = (x, y, z)$ إنه متجه الموضع للنقطة p ونقول عن (x, y, z) إنها إحداثيات النقطة p ، مما يعني أنّ إحداثيات نقطة p تتطابق مع مركبات متجه الموضع لهذه النقطة ، ونرمز لمتجه الموضع بالرمز $\vec{r}$

أخيراً يقابل كل نقطة p من الفضاء الثلاثي المزود بنظام إحداثي متجه طلق وحيد $\vec{op}$ الذي يكون متجه موضع لهذه النقطة بدايته النقطة o ونهايته هذه النقطة .

وبالعكس يقابل كل متجه طلق $\vec{a}$ نقطة وحيدة p بحيث يكون $\vec{a} = \vec{op}$

الدوال متجهية القيمة :

الدوال متجهية القيمة هي دوال تأخذ قيمها في فضاء المتجهات الطلقة الثلاثي الذي نرمزه R^3 ، سنتعامل مع نوعين من هذه الدوال :

1- الدوال المتجهية لمتحول حقيقي واحد وهي تقرن بكل نقطة t متجه $\vec{r}(t)$

$$A \subseteq R \longrightarrow R^3$$

$$R \ni t \longrightarrow \vec{r}(t)$$

2- الدوال متجهية القيمة لمتحولين حقيقيين:

$$D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longmapsto \vec{r}(u, v)$$

بما أن أي متجه في الفضاء الثلاثي يقابل ثلاثية وحيدة في $\mathbb{R}^3$

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

فإن كل دالة متجهية القيمة بمتحول حقيقي تكافئ ثلاثية مرتبة من الدوال الحقيقية بمتحول حقيقي:

$$t \mapsto x(t), \quad t \mapsto y(t), \quad t \mapsto z(t)$$

وبالعكس.

مفاهيم النهايات والاستمرار للدوال متجهية القيمة:

تعرف بنفس الطريقة للدوال الحقيقية:

نهاية دالة متجهية القيمة:

نقول عن المتجه $\vec{a}$ إنه نهاية لدالة متجهية القيمة إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |t - t_0| < \delta_\varepsilon, \|\vec{r}(t) - \vec{a}\| < \varepsilon \iff \lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$$

متجه ثابت

مبرهنة:

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a_1, \lim_{t \to t_0} y(t) = a_2, \lim_{t \to t_0} z(t) = a_3 \iff \lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$$

حيث $\vec{r}(t) = (\underbrace{x(t), y(t), z(t)}_{\text{دوال حقيقية}})$ و $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

- إذا كانت إحدى هذه الدوال ليس لها نهاية فيكون $\vec{r}(t)$ ليس له نهاية

خواص النهايات:

إذا كانت $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ دوال متجهية القيمة وكانت λ دالة حقيقية لها جميعها نهايات في النقطة t_0 حينئذ:

$$1) \lim_{t \to t_0} (\vec{u}(t) + \vec{v}(t)) = \lim_{t \to t_0} \vec{u}(t) + \lim_{t \to t_0} \vec{v}(t)$$

2) $\lim_{t\to t_0}(\lambda(t)\vec{u}(t)) = \lim_{t\to t_0}\lambda(t) . \lim_{t\to t_0}\vec{u}(t)$

3) $\lim_{t\to t_0}(\vec{u}(t).\vec{v}(t)) = \lim_{t\to t_0}\vec{u}(t) . \lim_{t\to t_0}\vec{v}(t)$

4) $\lim_{t\to t_0}(\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)) = \lim_{t\to t_0}\vec{u}(t) \times \lim_{t\to t_0}\vec{v}(t)$

5) $\lim_{t\to t_0}[\vec{u}(t),\vec{v}(t),\vec{w}(t)] = [\lim_{t\to t_0}\vec{u}(t), \lim_{t\to t_0}\vec{v}(t), \lim_{t\to t_0}\vec{w}(t)]$

استمرار دالة متجهية القيمة :

نقول عن الدالة $\vec{r}(t)$ إنها مستمرة عند t_0 إذا كانت الدوال $(x(t), y(t), z(t))$ مستمرة عند t_0.

- إذا كانت واحدة على الأقل من هذه الدوال ليست مستمرة بأن الدالة متجهية القيمة $\vec{r}(t)$ ليست مستمرة.

قابلية الاشتقاق للدالة متجهية القيمة :

- نقول عن الدالة $\vec{r}(t)$ إنها قابلة للاشتقاق عند t_0 إذا كانت النهاية :

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\vec{r}(t_0+h) - \vec{r}(t_0)] \quad ; \quad h = t - t_0$$

موجودة ومحدودة

- وينتج من التعريف أن الشرط اللازم والكافي حتى تكون الدالة $\vec{r}(t)$ قابلة للاشتقاق في النقطة t_0 هو أن تكون مركبات ع $x(t), y(t), z(t)$ قابلة للاشتقاق في النقطة t_0.

وعندئذٍ فإن مركبات المشتق تساوي مشتقات المركبات :

$$\vec{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

- ونرمز للمشتق بـ $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$ ونرمز للمشتقات أيضاً في بعض الأحيان بـ $\vec{r}^{\circ}$

خواص المشتقات:

إذا كانت الدوال المتجهية $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ والدالة λ (السلمية) قابلة جميعها للاشتقاق فعندئذٍ:

1) $$\frac{d(\vec{u}+\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}$$

2) $$\frac{d(\lambda\vec{u})}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}\vec{u} + \lambda\frac{d\vec{u}}{dt}$$

3) $$\frac{d(\vec{u}\,\vec{v})}{dt} = \vec{v}\frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

4) $$\frac{d(\vec{u}\times\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt}\times\vec{v} + \vec{u}\times\frac{d\vec{v}}{dt}$$ لا يجوز التبديل

5) $$\frac{d[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]}{dt} = \left[\frac{d\vec{u}}{dt},\vec{v},\vec{w}\right] + \left[\vec{u},\frac{d\vec{v}}{dt},\vec{w}\right] + \left[\vec{u},\vec{v},\frac{d\vec{w}}{dt}\right]$$

6) مشتق تركيب دالتين: لتكن الدالتين:

$$t: A\subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \vec{r}: t(A) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$s \longmapsto t(s) \qquad t \longmapsto \vec{r}(t)$$

$$A \xrightarrow{t} t(A) \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{\vec{r}} \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow \vec{r}\circ t: A \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

تكون دالة التركيب $\vec{r}\circ t$ قابلة للاشتقاق عند s_0 إذا كانت t قابلة للاشتقاق عند s_0 و $\vec{r}(t)$ قابلة للاشتقاق عند $t_0 = t(s_0)$

وقيمته تعطى بـ:

$$\frac{d(\vec{r}\circ t)}{ds}(s_0) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t(s_0))\cdot\frac{dt}{ds}(s_0)$$

ملاحظة:

لا يمكن تركيب دالتين متجهتين.

المشتق من مراتب عليا:

يعرف كما في الدوال الحقيقية ويكون لدالة متجهية القيمة $\vec{r}$ مشتق من المرتبة n في t_0، إذا وفقط إذا كانت لمركباتها مشتقات من المرتبة n في t_0 وعندئذ:

$$\vec{r}^{(n)}(t_0) = \left(x^{(n)}(t_0), y^{(n)}(t_0), z^{(n)}(t_0) \right)$$

نشر تايلور المحدود لدالة متجهية القيمة:

- مبرهنة:

إذا كان للدالة متجهية القيمة $\vec{r}$ مشتقات مستمرة حتى المرتبة $(n+1)$ عند t_0 فإننا نستطيع أن نكتب:

$$\vec{r}(t_0+h) = \vec{r}(t_0) + \frac{h}{1!}\vec{r}'(t_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}\vec{r}^{(n)}(t_0) + \vec{R}_{n+1}$$

$\vec{R}_{n+1}$ يسمى الباقي أو الخطأ.

حيث أن الباقي يعطى بصيغ مختلفة منها:

1) $\vec{R}_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\vec{r}^{(n+1)}(t_1)$ حيث $t_1 \in (t_0, t_0+h)$

2) $\vec{R}_{n+1} = h^{n+1}\vec{u}_{n+1}(h)$ حيث $\vec{u}_{n+1}$ دالة محدودة في جوار $h=0$

أي:

$$\exists\,]-\varepsilon,\varepsilon[\ ,\ \forall h \in]-\varepsilon,\varepsilon[\quad \|\vec{u}_{n+1}(h)\| < M < \infty$$

3) $\lim_{h\to 0} \frac{\vec{R}_{n+1}}{h^n} = \vec{0}$

- نشر تايلور دون الباقي يسمى نشر تايلور المحدود (من المرتبة n) للدالة $\vec{r}$ عند t_0 أو في جوار t_0

/ /

ملاحظة:

يكون لثلاثية متجهات مستقلة التوجيه ذاته إذا أمكن الحصول على إحداها من الأخرى بدوران وانسحاب مستمرين دون أن تفقد الثلاثية أثناء عملية الانتقال خاصية الاستقلال.

وهذا يقتضي وجود ثلاثة دوال متجهية القيمة $\vec{w}_1(t), \vec{w}_2(t), \vec{w}_3(t)$ مستمرة على المجال $[0,1]$ حيث يتحقق الشرطان:

① $\vec{w}_1(0) = \vec{e}_1 \quad \vec{w}_2(0) = \vec{e}_2 \quad , \vec{w}_3(0) = \vec{e}_3$ بما ننطلق من e في لحظة الانتقال

$$\vec{w}_1(1) = \vec{v}_1 \quad \vec{w}_2(1) = \vec{v}_2 \quad . \quad \vec{w}_3(1) = \vec{v}_3$$

② أياً كانت $t \in [0,1]$ (في كل لحظة t أثناء الحركة) تكون المتجهات $\vec{w}_1(t), \vec{w}_2(t), \vec{w}_3(t)$ مستقلة خطياً

المتجه $\vec{w}_1(t)$ يكتب بشكل وحيد دلالة ثلاثية مستقلة من المتجهات $\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1$

$$\vec{w}_1(t) = \phi_1^1(t)\,\vec{e}_1 + \phi_1^{(2)}(t)\,\vec{e}_2 + \phi_1^{(3)}(t)\,\vec{e}_3$$

$$\vec{w}_1(0) = \vec{e}_1$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_1 &= 1\,\vec{e}_1 + 0\,\vec{e}_2 + 0\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}_1 &= \phi_1^1(0)\,\vec{e}_1 + \phi_1^2(0)\,\vec{e}_2 + \phi_1^3(0)\,\vec{e}_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \phi_1^2(0) &= 0 \\ \phi_1^1(0) &= 0 \end{aligned}$$

حيث $\phi_i^j(t)$ دوال حقيقية معرفة ومستمرة على $[0,1]$ فلابد أن يتحقق:

أ) $$\phi_i^j(0) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$$

ب) $$\Delta(t) = \det \phi_i^j(t) \neq 0$$

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \phi_1^1(t) & \phi_1^2(t) & \phi_1^3(t) \\ \phi_2^1(t) & \phi_2^2(t) & \phi_2^3(t) \\ \phi_3^1(t) & \phi_3^2(t) & \phi_3^3(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

لأن المتجهات $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$ مستقلة خطياً $(\forall t)$

وبالتالي

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

المتجه $\vec{v_i}$ يكتب كتركيب خطي بشكل وحيد بدلالة $\vec{e_i}$

$$\vec{v_1} = \vec{w_1}(1) = a_1^1 \vec{e_1} + a_1^2 \vec{e_2} + a_1^3 \vec{e_3}$$

$$\Delta(1) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} > 0$$

لنثبت التكافؤ بين التعريفين : { التعريف المذكور في هذه الملاحظة و التعريف المذكور في المحاضرة الثانية (توجيه الفضاء الثلاثي) }

- نفترض أولاً أن للثلاثيتين التوجيه نفسه حسب التعريف الأخير. ولما كانت $\Delta(t)$ دالة مستمرة لـ t على $[0,1]$ و $\Delta(t) \neq 0$ فلا يمكنه أن تتغير إشارتها.

وإذا لاحظنا أن $(\Delta(0) = 1)$ و $(\Delta(1) = \Delta)$. الذي لا يمكن أن يكون أصغر من الصفر لأنه حتى يتغير من موجب إلى سالب يجب أن يمر بـ (0) وهو لا ينعدم)

وبالتالي لابد أن يكون $\Delta > 0$

- إذا افترضنا تحقق التعريف الأول. (المذكور في المحاضرة الثانية)

فإن الصيغ:

$$\vec{w_1} = (1 + t(a_1^1 - 1))\vec{e_1} + t a_1^2 \vec{e_2} + t a_1^3 \vec{e_3}$$
$$\vec{w_2} = t a_2^1 \vec{e_1} + (1 + t(a_2^2 - 1))\vec{e_2} + t a_2^3 \vec{e_3}$$
$$\vec{w_3} = t a_3^1 \vec{e_1} + t a_3^2 \vec{e_2} + (1 + t(a_3^3 - 1))\vec{e_3}$$

تعرف ثلاث دوال مستمرة تحقق متطلبات التعريف الثاني أي

متطلبات التعريف الثاني {
$w_i(0) = e_i \quad , \quad w_i(1) = v_i \qquad (i = \overline{1,3})$
و المتجهات $w_i(t)$ مستقلة
محققة $(\forall t)$