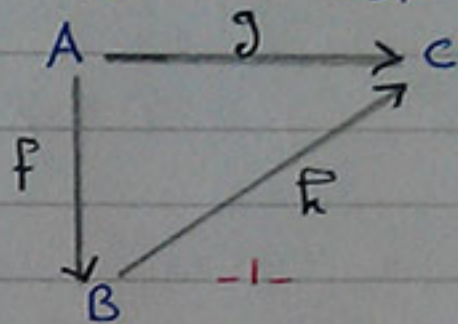


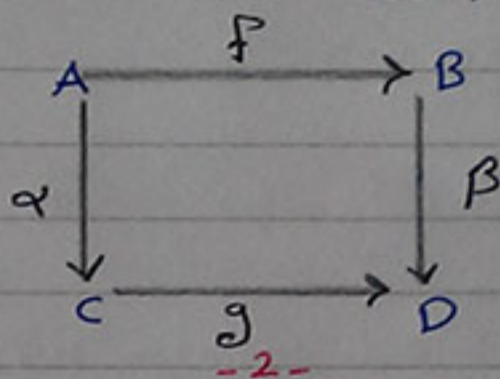
المحظرات السادسة: المتتاليات التبادلية - المتتاليات التبادلية

تعريف: نقول عن المحظرات التبادلية التالية:



أنه محظرات تبادلية إذا كان $h \circ f = g$

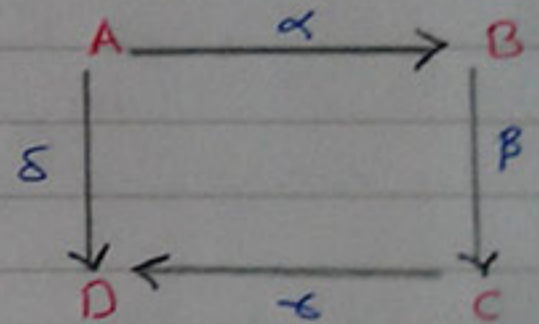
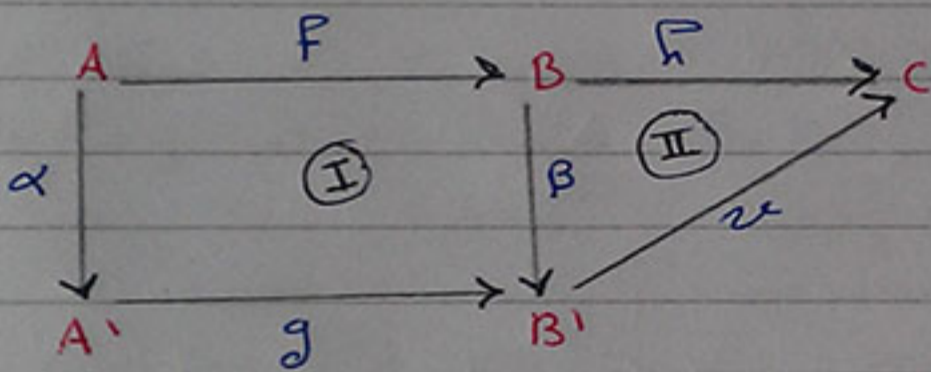
ونقول عن محظرات التبادلية 2



أنه تبادلية إذا كان

$$g \circ \alpha = \beta \circ f$$

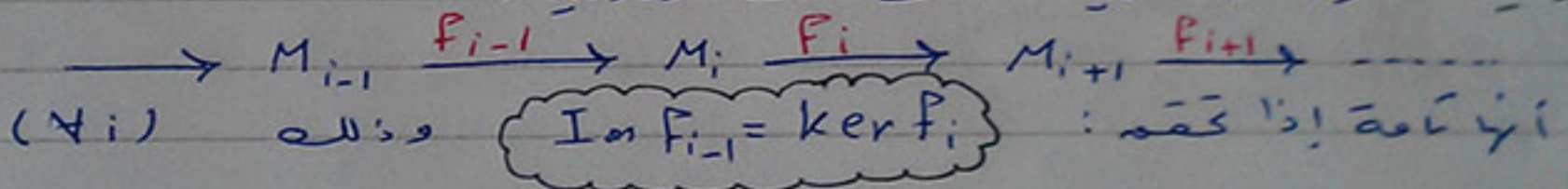
أعمدة أخرى على محظرات تبادلية:



تبادلية لأن $\delta \circ \beta \circ \alpha = \delta \circ \gamma$

تبادلية I و II تبادلية $\Rightarrow \beta \circ f = g \circ \alpha$ and $\nu \circ \beta = h$

تعريف: نقول عن متتالية من المتتاليات التبادلية:



توضيح: لكن المتتالية التبادلية $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ فإن $Im f = ker g$ و $Im g = ker h$

وخذ مباشرة "إذا كانت" $M_{i-1} \xrightarrow{F_{i-1}} M_i \xrightarrow{F_i} M_{i+1} \xrightarrow{F_{i+1}} M_{i+2} \dots$ متتالية تامة فإن:

$$* \quad F_i \circ F_{i-1} = 0 \quad (\forall i)$$

الإثبات: $(F_i \circ F_{i-1})(x) = F_i(F_{i-1}(x)) = 0 \quad \#$
 $\text{Im } F_{i-1} = \ker F_i$
 لأن المتتالية تامة

ملاحظة: $F \circ g = 0$ فإن $g(x) \in \ker F \Leftrightarrow F(g(x)) = 0 \Leftrightarrow (F \circ g)(x) = 0$
 وعليه فإن $\text{Im } g \subseteq \ker F$

مبرهنة: إذا كان $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ التساوي القانوني (مقصود المطابق) وكان $N \rightarrow 0$ تساكلاً صفرياً فإن التساوية

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0 \text{ تامة} \Leftrightarrow f \text{ متباينة}$$

التساوية

$$N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0 \text{ تامة} \Leftrightarrow g \text{ عامر}$$

التساوية

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0 \text{ تامة} \Leftrightarrow f \text{ تقابل}$$

$$g : 0 \rightarrow M \text{ مقصود مطابق}$$

$$\ker g = \text{Im } g = 0 \text{ فإن } 0 \rightarrow 0$$

تذكيرة عبد البرهان:

$$\left. \begin{array}{l} \ker \alpha = N \\ \text{Im } \alpha = 0 \end{array} \right\} \alpha : N \rightarrow 0 \text{ التساكلي القانوني فإن } x \mapsto 0$$

البرهان:

التساوية تامة فتلاحظان $\# \ker f = 0 \Leftrightarrow f \text{ متباينة}$

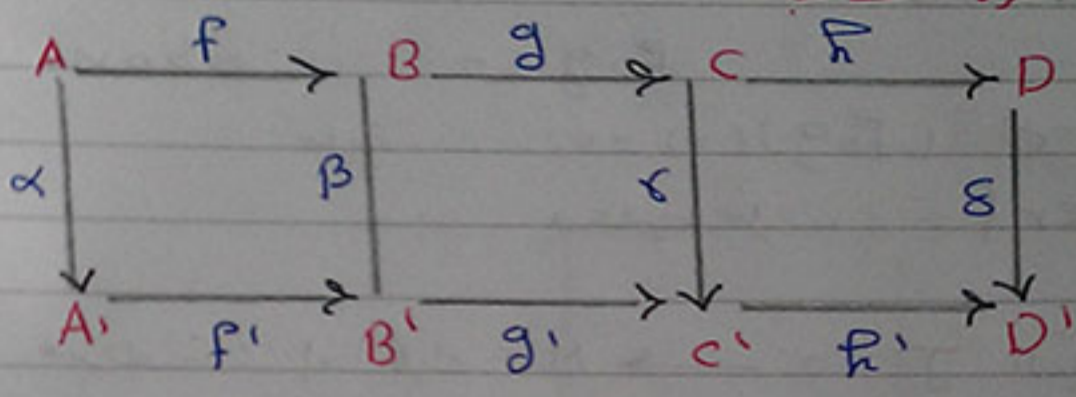
التساوية $\# N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0 \text{ تامة} \Leftrightarrow \text{Im } g = P \Leftrightarrow g \text{ عامر}$

التساوية مباشرة "من ① و ②"

نرمطانات: $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$ هذه التسالفة تامة عندما يتحقق f متباينة $\wedge \text{Im } f = \text{ker } g \wedge g$ غير

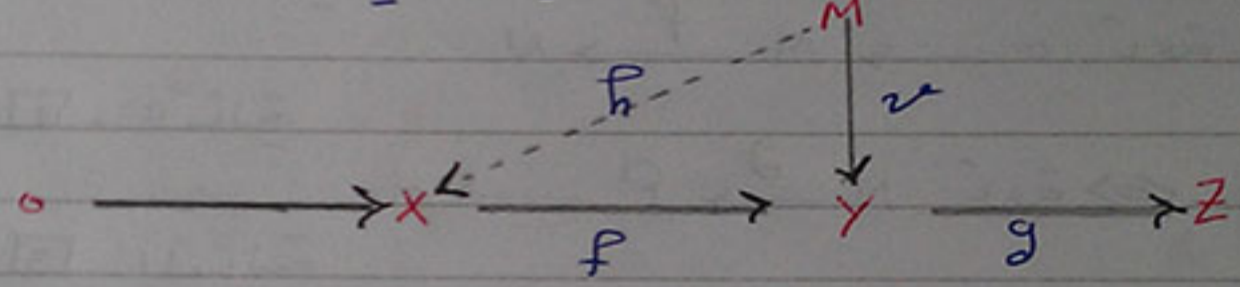
مثال: $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ تامة إذا كان $f \wedge \text{Im } f = \text{ker } g$ متباينة

مثال على منطقتين متبادلتين: «مثال للفقرة السابقة»



تبادلتين عند ما يكون كل منطقتين المتخط الكلي متبادلتين
أي: $f' \circ \alpha = \beta \circ f$
 $g' \circ \beta = \gamma \circ g$
 $h' \circ \gamma = \delta \circ h$

تمرين: لكن لدينا المنطق التام المودولية التالية:



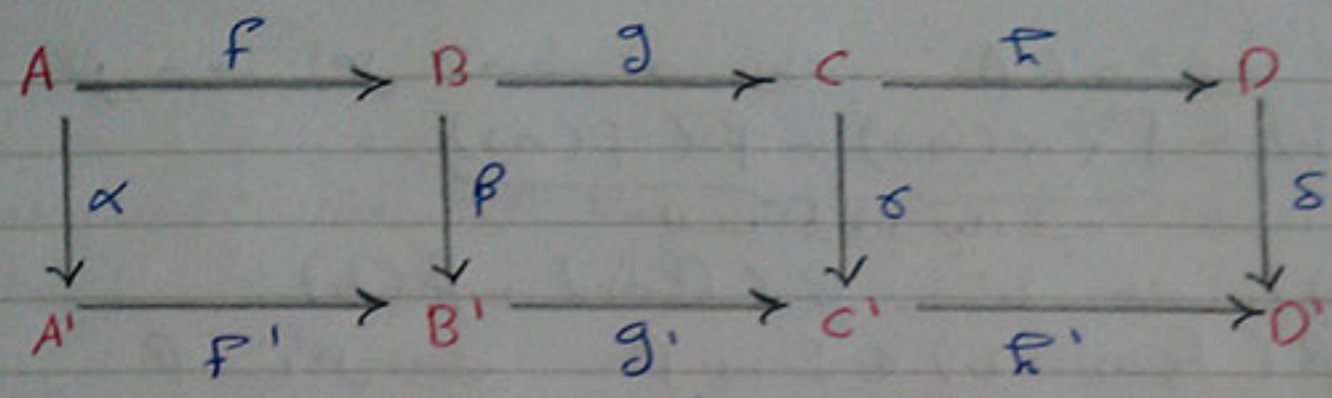
الذي فيه شرطه متالفة تامة و $g \circ v = 0$ أثبت أنه يوجد تامل مودولي وحيد $h: M \rightarrow X$ يجعل المنطق متبادلتين.

الحل: يجب اثبات أن f متباينة $\wedge \text{Im } v \subseteq \text{Im } f$ فتكون h تامل موجد.

بما أن الشرط المتالفة التامة فإن f متباينة
كما أن ① $\text{Im } f = \text{ker } g$ كون الشرط متالفة تامة ولدينا $g \circ v = 0$ وحصاً فإن ② $\text{Im } v \subseteq \text{ker } g$
عند ① و ② نجد أن $\text{Im } v \subseteq \text{Im } f$

إذ أنه يوجد تامل مودولي "h" وحيد $h: M \rightarrow X$ يحقده $f \circ h = v$ يجعل المنطق متبادلتين. #

عبر صفة: ليكن



مخطط تبادل من التماثلات المودولية، شرطه متباينين متباينين فان:

1. إذا كان α, γ عامرين و β متباين فان β عامر.

2. إذا كان β, δ متباينين و α عامر فان α متباين.

بملاحظة قبل البرهان: من هذا المخطط نلاحظ انه يكون:

- تماثل عامر بين عامرين يليه متباين.
- تماثل متباين بين متباينين يتبعه عامر.

البرهان:

1. أيًا كان $b' \in B'$ فان $g'(b') \in C'$

وبما ان α عامر فان $c \in C$ حيث يكون $g'(b') = \alpha(c)$

نأخذ صورة الطرفين ونضع h'

$$h'(g'(b')) = h'(\alpha(c))$$

« لان المخطط تبادل » $= \delta(h(c))$ لان $h'(g'(b')) = 0$ لان h' التفاضلي متباين تامر

ومنه $\delta(h(c)) = 0$ وبما ان δ متباين فان $h(c) = 0$ أي

$\Rightarrow c \in \ker h \wedge \ker h = \text{Im } g$ لان المخطط تبادل

وبالتالي يوجد $b \in B$ حيث $c = g(b)$

نعود إلى العلاقة 1 ونفرض c : $g'(b') = \alpha(g(b))$

لان المخطط تبادل $= g'(\beta(b))$

$$g'(b') - g'(\beta(b)) = 0 \Rightarrow g'(b' - \beta(b)) = 0$$

أو g' تماثل

ومنه $b' - \beta(b) \in \ker g'$ ولكن $\ker g' = \text{Im } f'$ لان التفاضلي متباين تامر

ومنه يوجد $a \in A'$ حيث $b' - \beta(b) = f'(a)$ وبما ان α عامر فان

فإنه من أجل العنصر $a' \in A$ يوجد $a \in A$ حيث $a' = \alpha(a)$ وبالتالي يكون

$$b' - \beta(b) = \beta(f(a))$$

لأن المخطط تبادلي

$$\Rightarrow b' - \beta(b) = \beta(f(a)) \Rightarrow b' = \beta(f(a)) + \beta(b)$$

$$b' = \beta(f(a) + b) \in \text{Im } \beta \quad \Leftarrow \text{تأكل}$$

أي أن β عامر. #

2. - برره كترين « نفس طريقة برهان 1 »

النتيجة المحاضرة ...