المحاضرة السادسة: المخططات التبادلية - المتتاليات التامة لتشاكلات مودولية.

تعريف: نقول عن المخطط التطبيقات التالي

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\ B \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

-1-

أنه مخطط تبادلي إذا كان $h \circ f = g$

ونقول عن مخطط التطبيقات 2

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

-2-

أنه تبادلي إذا كان

$g \circ \alpha = \beta \circ f$

- أمثلة أخرى على مخططات تبادلية:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & C \\ A' \arrow[r, "g"'] & B' \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\delta"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ D & C \arrow[l, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

تبادلي لأن $\gamma \circ \beta \circ \alpha = \delta$

تبادلي لأن II تبادلي و I تبادلي

$\beta \circ f = g \circ \alpha$ <u>and</u> $v \circ \beta = h \Leftrightarrow$

تعريف: نقول عن متتالية من التشاكلات المودولية:

$$\longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

أنها تامة إذا تحقق: $\mathrm{Im}\, f_{i-1} = \ker f_i$ وذلك $(\forall i)$

توضيح: لتكن المتتالية التامة $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ فإن

$\mathrm{Im}\, f = \ker g \;\wedge\; \mathrm{Im}\, g = \ker h$

- وينتج مباشرةً إذا كانت $M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \cdots$ متتالية تامة فإن:

$$\star \quad f_i \circ f_{i-1} = 0 \quad (\forall i)$$

الإثبات: $(f_i \circ f_{i-1})(x) = f_i(\underbrace{f_{i-1}(x)}) = 0$ #

$$\underbrace{\mathrm{Im}\, f_{i-1} = \ker f_i}_{\text{لأن المتتالية تامة}}$$

ملاحظة: $f \circ g = 0$

فإن $g(x) \in \ker f \Leftarrow f(g(x)) = 0 \Leftarrow (f \circ g)(x) = 0$

وعليه فإن $\mathrm{Im}\, g \subseteq \ker f$

مبرهنة: إذا كان $J : 0 \longrightarrow M$ التابع القانوني (مقصور المطابق)
وكان $N \longrightarrow 0$ تشاكل صفري فإن

$\boxed{1}$ - المتتالية

$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ تامة $\Leftrightarrow$ f متباين

$\boxed{2}$ - المتتالية

$N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ تامة $\Leftrightarrow$ g غامر

$\boxed{3}$ - المتتالية

$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ تامة $\Leftrightarrow$ f تقابل

تذكرة قبل البرهان: $g : 0 \longrightarrow M$ مقصور مطابق

$0 \longmapsto 0$ فإن $\ker g = \mathrm{Im}\, g = 0$

$\alpha : N \longrightarrow 0$ الشكل الصفري أي الغمر القانوني فإن
$x \longmapsto 0$

$$\left.\begin{array}{l} \ker \alpha = N \\ \mathrm{Im}\, \alpha = 0 \end{array}\right\}$$

البرهان:

$\boxed{1}$ - المتتالية تامة فنلاحظ أن $\ker f = 0 \Leftrightarrow f$ متباين #

$\boxed{2}$ - المتتالية $N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ تامة $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\, g = P \Leftrightarrow g$ غامر #

$\boxed{3}$ - ينتج مباشرةً من ① و ②.

ملاحظات: $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ هذه المتتالية تامة عندما
يتحقق f متباين $\wedge$ $\operatorname{Im} f = \ker g$ $\wedge$ g غامر

مثال: $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ تامة إذا كان
$\operatorname{Im} f = \ker g$ $\wedge$ f متباين

مثال على مخطط تبادلي: «مثال للفقرة السابقة»

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[d, "\delta"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D'
\end{tikzcd}
$$

تبادلي عندما يكون كل مخطط من المخطط الكلي تبادلي
أي:
$$\left.\begin{aligned} f'\circ\alpha &= \beta\circ f \\ g'\circ\beta &= \gamma\circ g \\ h'\circ\gamma &= \delta\circ h \end{aligned}\right\}$$

تمرين: ليكن لدينا المخطط التشكلات المودولية التالية:

$$
\begin{tikzcd}
 & & M \arrow[d, "v"] \arrow[dll, dashed, "h"'] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

الذي فيه سطره متتالية تامة و $g\circ v = 0$
أثبت أنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: M \longrightarrow X$ يجعل المخطط تبادلي.

الحل: يجب إثبات أن f متباين $\wedge$ $\operatorname{Im} v \subseteq \operatorname{Im} f$ فيكون h تشاكل موجود.
بما أن السطر متتالية تامة فإن f متباين
كما أن $\operatorname{Im} f = \ker g$ (1) كون السطر متتالية تامة ولدينا
$g\circ v = 0$ فرضاً فإن $\operatorname{Im} v \subseteq \ker g$ (2)
من (1) و (2) نجد أن $\operatorname{Im} v \subseteq \operatorname{Im} f$
إذن يوجد تشاكل مودولي وحيد «h» $h: M \longrightarrow X$ يحقق
$f\circ h = v$ أي يجعل المخطط تبادلي. #

مبرهنة: ليكن

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[d, "\delta"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D'
\end{tikzcd}$$

مخطط تبادلي من الشاكلات المودولية، سطراه متتاليتين تامتين فإن:

[1] - إذا كان α ، γ غامرين و δ متباين فإن β غامر.

[2] - إذا كان β ، δ متباينين و α غامر فإن γ متباين.

ملاحظة حول البرهان: من هذا المخطط نلاحظ أنه يكون:
- تشاكل غامر بين غامرين يليه متباين.
- تشاكل متباين بين متباينين يسبقه غامر.

البرهان:

[1] - ليكن $b' \in B'$ فإن $g'(b') \in C'$

وبما أن γ غامر فإنه يوجد $c \in C$ حيث يكون ① $g'(b') = \gamma(c)$

نأخذ صورة الطرفين وفق h'

$$\underbrace{h'(g'(b'))}_{=0} = \underbrace{h'(\gamma(c))}_{=\delta(h(c))}$$

لأن السطر السفلي متتالية تامة — «لأن المخطط تبادلي»

ومنه $\delta(h(c)) = 0$ وبما أن δ متباين فإن $h(c) = 0$ أي

$\Rightarrow c \in \ker h \wedge \ker h = \operatorname{Im} g$ «لأن المخطط تبادلي»

وبالتالي يوجد $b \in B$ حيث $c = g(b)$

نعود إلى العلاقة ① ونعوض c : $g'(b') = \gamma(g(b))$

$= g'(\beta(b))$ ← لأن المخطط تبادلي

$g'(b') - g'(\beta(b)) = 0 \Rightarrow g'(b' - \beta(b)) = 0$

g' تشاكل

ومنه $b' - \beta(b) \in \ker g'$ ولكن $\ker g' = \operatorname{Im} f'$ لأن السطر السفلي متتالية تامة

ومنه يوجد $a \in A'$ حيث $b' - \beta(b) = f'(a)$ وبما أن α غامر فإنه

فإنه من أجل العنصر a' يوجد $a \in A$ حيث $a' = \alpha(a)$ وبالتالي يكون

$$b' - \beta(b) = \underbrace{f'(\alpha(a)) = \beta(f(a))}_{\text{لأن المخطط تبادلي}}$$

$$\Rightarrow b' - \beta(b) = \beta(f(a)) \Rightarrow b' = \beta(f(a)) + \beta(b)$$

$b' = \beta(f(a) + b) \in \operatorname{Im}\beta$ $\Leftarrow$ β تشاكل

أي أن β غامر . #

$\boxed{2}$ - يترك كتمرين «نفس طريقة برهان $\boxed{1}$»

انتهت المحاضرة ...