/ /

الإثنين : 10/11/2014

المحاضرة العاشرة :

نظرية الألعاب "نظرية المباريات الاستراتيجية" :

ظهرت نظرية الألعاب عام ١٩٢٧ ومؤسسها العالم الألماني Von Neuman

تهدف نظرية الألعاب إلى اختيار استراتيجية مثلى لتحقيق أعظم ربح ممكن وأقل خسارة ممكنة علماً أن أي مباراة أو أي لعبة فيها علم لأقل طرفين أي عليه أن يكون عدد أطراف في اللعبة .

لنظرية الألعاب تطبيقات في المجال الاقتصادي و المجال العسكري ومجالات أخرى

توجد عدة أنواع من المباريات :

1) ألعاب الاستراتيجية الصفرية : (ذات المجموع الصفري)

يكون فيها مجموع خسارة اللاعبين مساوياً لمجموع الربح (أي لا يوجد وسيط في عملية الربح أو الخسارة) في هذه الحالة فاللعبة ذات نتيجة صفرية .

2) لعبة ذات استراتيجية مضمونة (الصرفة) :

في هذه الاستراتيجية يضمن اللاعب إمّا ربح محدد أو خسارة محددة أي لا يوجد مخاطرة في هذه اللعبة ، يستخدم عامة الناس في إيداع مدخراتهم في البنوك مقابل نسبة محددة سنوياً أو شهرياً .

إلا أن التغيرات الاقتصادية قد تلعب دور سلبي إذا كانت فترة الإيداع طويلة الأمد .

3) استراتيجية اللعبة المعتدلة :

لا يوجد فيها خسارة مادية أو معنوية وهي ألعاب التسلية (ألعاب الكمبيوتر)

4) ألعاب ذات استراتيجية معنوية :

هي الألعاب التي تكون فيها الخسارة معنوية مثل ألعاب الشطرنج وألعاب الكرة .
علماً أنه لهذه المباريات وقع سلبي على الشخص الذي يسرف أوقاته وحياته .

ملاحظة:

لا توجد لعبة تكون فيها الأطراف متساوية تماماً كتساوي القدرات العقلية أو القدرات المالية

5 ألعاب ذات مجموع غير صفري:

وهي الألعاب التي يكون فيها وسيط ضامن في هذه الحالة الوسيط الضامن له أجر محدد سلفاً تقتطع من كمية الربح لكي يضمن للرابح الحصول على ما ربحه.

ومن هذه الألعاب (ألعاب البوكر، ألعاب اليانصيب، ألعاب اللوتو) وهذه الألعاب تعتبر خطرة على المجتمع لأنها لا تقع تحت رقابة الدولة وقد تحدث خللاً اجتماعياً كبيراً.

ألعاب البوكر يكون فيها صندوق يستلم الأموال من جميع الأطراف ثم يشرف على إدارة اللعبة وبالنتيجة توزيع الأرباح بعد اقتطاع نصيبه من كل لعبة.

- ألعاب اليانصيب:

تقع تحت إشراف الدولة أو منظمات محددة تقتطع جزء من ثمن أوراق اليانصيب وتوزع الأرباح بشكل أكبر شريحة ممكنة من المشتركين بهذه اللعبة وهي لعبة متعددة الأطراف

- ألعاب اللوتو:

هي ألعاب شبيهة بألعاب اليانصيب تقع تحت إشراف الدولة أو منظمات محددة لكن هذه اللعبة تمكن المشترك من اختيار الأرقام التي يراها مناسبة له.

وتقتطع للجهة المشرفة على هذه اللعبة أجورها وتوزع بقية الأموال على أكبر شريحة ممكنة من المشتركين

- ألعاب الآلة:

وهي ألعاب تقع تحت إشراف الدولة باستخدام آلات تمكن المشترك من اختيار عدد دورات مقابل دفع مبلغ مالي في هذه الآلة علماً أن نسبة الخسارة 50% والربح 50%

تقع على عاتق الجهة المشرفة ضمان حالات ربح في هذه الآلة وإغلاق هذه الآلة بصندوق لكي لا يتم العبث بها وذلك مقابل أجر محدد سلفاً من الجهة المستثمرة لهذه الآلة

وهذا النوع من الألعاب رغم الرقابة الشديدة يعد خطراً على المجتمع

الدراسة الرياضية لمفهوم الألعاب:

لتكن لدينا اللاعبين A, B في لعبة (فرد - زوج) مثلاً:

تمثل الاستراتيجية للاعبين في جدول:

B / A	فردي	زوجي
فردي	3	-5
زوجي	-1	4

لا يوجد نقطة استقرار

لعبة فيها استراتيجيتين فقط (استراتيجية زوجي - فردي)

إشارة (-) تدل على ربح اللاعب B

الاستراتيجية المثلى للاعب A هو أن يلعب زوجي واللاعب B هو أن يلعب فردي.

- كل لعبة فيها نقطة استقرار وهي تمثل قيمة دالة الهدف ويمكنه أن تكون نقطة الاستقرار ظاهرة أم أحتاج إلى حل برنامج خطي لأحد اللاعبين (عند نقطة الاستقرار نستطيع أن نأخذ الاستراتيجية بشكل ثابت) بشكل عام البرنامج الأصلي لأحد اللاعبين يعطي البرنامج للاعب الثاني (وهو البرنامج المرافق للأصلي).

المصفوفة التي تمثل استراتيجية اللاعبين تسمى مصفوفة المدفوعات.

ملاحظة: هناك ألعاب يكون فيها الطرف الثاني هو الطبيعة لأنه يمكنه اعتبارها طرف يتميز بذكاء شديد.

نكتب مصفوفة المدفوعات بالشكل:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

فنوجد نقطة الاستقرار بالشكل التالي:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

مثال:

لتكن لدينا اللعبة الاستراتيجية مصفوفة مدفوعاتها معطاة بالشكل:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

حيث (p_1, p_2, p_3) استراتيجيات اللاعب A

(q_1, q_2, q_3) استراتيجيات اللاعب B.

A \ B	q_1	q_2	q_3
p_1	3	-5	0
p_2	-4	-2	1
p_3	5	4	2

أوجد نقطة الاستقرار إن وجدت.

A \ B	q_1	q_2	q_3	min
p_1	3	-5	0	-5
p_2	-4	-2	1	-4
p_3	5	4	2	2
max	5	4	2	$2 \rightarrow max$, $2 \rightarrow min$

نوجد min على الأسطر

و max على الأعمدة

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

$$2 = 2$$

وبالتالي نقطة الاستقرار هي

2.

مثال:

لتكن لدينا لعبة الاستراتيجية معطاة بالشكل التالي:

B \ A	q_1	q_2
باحتمال x ← p_1	3	-5
باحتمال $1-x$ ← p_2	-1	4

اللاعب الأول A يلعب p_1 باحتمال x

و p_2 باحتمال $1-x$ أما B يلعب q_1

فنجد

$$3(x) - 1(1-x) = -1 + 4x$$

اللاعب A يلعب p_1 باحتمال x و p_2 باحتمال $1-x$ أما B يلعب فقط q_2

$$-5(x)+4(1-x) = 4-9x$$

$$-1+4x = 4-9x \Rightarrow 13x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{13}$$

$$\Rightarrow 1-x = 1-\frac{5}{13} = \frac{8}{13}$$

أي أن الاحتمال الذي يحقق الاستراتيجية المثلى هو: $1-x = \frac{8}{13}$ ، $x = \frac{5}{13}$

وبالتالي:

$$-1+4x = -1+\frac{20}{13} = \frac{7}{13}$$ (ربح اللاعب A)

$$4-9x = 4-\frac{45}{13} = \frac{7}{13}$$

اللاعب B يلعب q_1 باحتمال y و q_2 باحتمال $1-y$ أما A يلعب فقط p_1

$$3y-5(1-y) = 8y-5$$

اللاعب B يلعب q_1 باحتمال y و q_2 باحتمال $1-y$ أما A يلعب فقط p_2

$$-1y+4(1-y) = -5y+4$$

$$8y-5 = -5y+4 \Rightarrow 13y = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{13}$$

$$\Rightarrow 1-y = 1-\frac{9}{13} = \frac{4}{13}$$

أي أن الاحتمال الذي يحقق الاستراتيجية المثلى هو: $y = \frac{9}{13}$ ، $1-y = \frac{4}{13}$

وبالتالي: $8y-5 = 8\left(\frac{9}{13}\right)-5 = \frac{7}{13}$ (ربح B)

$g(A) = g(B) = \frac{7}{13} \Leftarrow$ تحوي اللعبة نقطة استقرار هي $\frac{7}{13}$

البرامج الخطية للاعبين:

g قيمة دالة الهدف (تسعيرة اللعبة)

(يهدف A أن تكون دالة الهدف max) $A: g \longrightarrow max$

(يهدف B أن تكون g min) $B: g \longrightarrow min$

"مصفوفة المدفوعات"

B / A	y_1	y_2	---	y_n
x_1	a_{11}	a_{12}	--	a_{1m}
x_2	a_{21}	a_{22}	---	a_{2m}
⋮	⋮			
x_m	a_{m1}	------		a_{mn}

نحتاج إلى شروط مسألة ودالة هدف:

بالنسبة للاعب A

$$Z = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \rightarrow$$ (تساوي الواحد لأن قيمة احتمالية)

شروط

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_n \geqslant g \\ a_{12}x_1 + \cdots + a_{m2}x_n \geqslant g \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant g \end{array}\right.$$

بالنسبة للاعب B

$$F = y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$$

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \leqslant g$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2m}y_n \leqslant g$$

$$\vdots$$

$$a_{1m}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n \leqslant g$$

لدينا بالنسبة للاعب A:

$$g \longrightarrow Max \Rightarrow \frac{1}{g} \longrightarrow Min$$

$$\frac{x_i}{g} = t_i \quad ; \quad i = 1.m$$

ومنه

$$Z = t_1 + t_2 + \dots + t_n \longrightarrow Min$$

$$a_{11} t_1 + a_{21} t_2 + \dots + a_{m1} t_m \geqslant 1$$

$$\vdots$$

$$a_{1n} t_1 + \dots + a_{mn} t_m \geqslant 1$$

ولدينا بالنسبة للاعب B :

$$g \longrightarrow Min \Rightarrow \frac{1}{g} \longrightarrow Max$$

$$\frac{y_i}{g} = S_j \quad ; \quad j = 1.n$$

ومنه

$$F = S_1 + S_2 + \dots + S_n \longrightarrow Max$$

$$a_{11} S_1 + \dots + a_{1n} S_n \leqslant 1$$

$$\vdots$$

كل برنامج خطياً نضع

$$a_{n1} S_1 + \dots + a_{mn} S_n \leqslant 1$$

متغيرات فصل

$$S_j \geqslant 0 \quad ; \quad j = 1.n$$

والمسألة:

$$F = S_1 + S_2 + S_3 \longrightarrow Max$$

$$3S_1 - 2S_2 \leqslant 1$$

$$-4S_1 - 2S_2 + S_3 \leqslant 1$$

$$5S_1 + 4S_2 + 2S_3 \leqslant 1$$

$$S_1 , S_2 , S_3 \geqslant 0$$

ومن البرنامج ما نستنتج قيمة دالة الهدف