# المحاضرة الحادية عشر:

تمرين: لتكن $G$ زمرة، $a,b \in G$ بحيث: $a\cdot b=b\cdot a$

• ولنفرض أنّ: $o(a)=n, o(b)=m$

• إذا كان: $\gcd(n,m)=1$ عندئذٍ:

$$\langle a\cdot b\rangle=\langle a,b\rangle=\{a^i\cdot b^j \,;\, 0\leq i<n , 0\leq j<m\}$$

الإثبات:

• لنبرهن أولاً أنّ: $\{\langle a\cdot b\rangle=\langle a,b\rangle\}$

• لدينا: $a,b\in\langle a,b\rangle$ ومنه: $a\cdot b\in\langle a,b\rangle$

• لكن: $\langle a\cdot b\rangle$ هي أصغر زمرة تحوي: $a\cdot b$

• ومنه: $\boxed{\langle a\cdot b\rangle\subseteq\langle a,b\rangle}$

• من جهة أخرى: بما أنّ: $\gcd(n,m)=1$ يوجد: $s,t\in\mathbb{Z}$ بحيث:

$$1=s\cdot n+t\cdot m$$

• $$\begin{aligned} a^1=a^{sn+t\cdot m} &= a^{sn}\cdot a^{tm} \\ &= (a^n)^s\cdot a^{t\cdot m}=(e)^s\cdot a^{t\cdot m} \\ &= a^{t\cdot m} \\ &= a^{t\cdot m}\cdot(b^m)^t \\ &= (a\cdot b)^{t\cdot m}\in\langle a\cdot b\rangle \end{aligned}$$

$(b^m)^t=(e)^t=e$

$$\Rightarrow \boxed{a=(a\cdot b)^{t\cdot m}\in\langle a\cdot b\rangle}$$

• $$\begin{aligned} b^1=b^{sn+tm} &= b^{sn}\cdot b^{tm} \\ &= b^{s\cdot n}\cdot(b^m)^t=b^{s\cdot n}\cdot(e)^t \\ &= b^{s\cdot n} \\ &= b^{s\cdot n}\cdot(a^n)^s \\ &= (a\cdot b)^{s\cdot n}\in\langle a\cdot b\rangle \end{aligned}$$

$(a^n)^s=(e)^s=e$

$$\Rightarrow \boxed{b=(a\cdot b)^{s\cdot n}\in\langle a\cdot b\rangle}$$

• ومنه: $a,b\in\langle a\cdot b\rangle$

• لكن: $\langle a,b\rangle$ هي أصغر زمرة تحوي: $a,b$

ومنه: $\boxed{\langle a,b\rangle \subseteq \langle a.b\rangle}$

من الاحتواءين نجد أنّ:

$$\{\langle a,b\rangle = \langle a.b\rangle\}$$

$$\langle a.b\rangle = \{(a.b)^K \; ; \; K\in\mathbb{Z}\}$$

$$(a.b)^K = a^K . b^K \qquad 0\le K<n \; , \; 0\le K<m$$

$$K=0 \Rightarrow (a.b)^K = e$$

$$K=1 \Rightarrow (a.b)^K = a.b$$

$$K=2 \Rightarrow (a.b)^K = a^2.b^2$$

$$\Longrightarrow \quad \langle a.b\rangle = \{a^i.b^i \; ; \; 0\le i<n , 0\le j<m\}$$

## الزمرة الجزئية الناظمية:

تعريف: لتكن $G$ زمرة ، $H$ زمرة جزئية في $G$ نقول إنّ $H$ ناظمية في $G$ إذا تحقق: $\forall a\in G : a.H=H.a$

. أمثلة: كل زمرة جزئية من زمرة تبديلية تكون ناظمية وكلاً من: $\langle e\rangle$ ، $\langle G\rangle$ زمرة جزئية ناظمية في أي زمرة $G$.

مبرهنة: لتكن $G$ زمرة ، $H$ زمرة جزئية في $G$ الشروط التالية متكافئة:

1) الزمرة الجزئية $H$ ناظمية في $G$.

2) $\forall a\in G ; a.H.a^{-1} \subseteq H$

3) $\forall a\in G ; a^{-1}.H.a \subseteq H$

الإثبات:

$(1 \Rightarrow 2)$: لنفرض أنّ الزمرة الجزئية $H$ ناظمية في $G$ عندئذ:

$$\forall a\in G : a.H=H.a$$

$$\Rightarrow \forall a\in G : a.H.a^{-1} = H.a.a^{-1} = H$$

ومنه يكون:

$$\forall a\in G ; a.H.a^{-1} \subseteq H$$

«2 ⇐ 3»:

ليكن: $a \in G$ عندئذ: $a^{-1} \in G$

$$a^{-1}.H.(a^{-1})^{-1} \subseteq H \Rightarrow a^{-1}.H.a \subseteq H$$

«3 ⇐ 1»:

• ليكن: $a \in G$ ولنبرهن أنّ: $a.H=H.a$

• لدينا من الفرض: $a^{-1}.H.a \subseteq H$ ومنه: $\boxed{H.a \subseteq a.H}$

• ولدينا أيضاً: $a^{-1} \in G$

ومنه: $(a^{-1})^{-1}.H.a^{-1} \subseteq H$

أي: $a.H.a^{-1} \subseteq H$

ومنه: $\boxed{a.H \subseteq H.a}$

• ومن الاحتوائين:

$$a.H = H.a$$

---

مبرهنة: لتكن G زمرة، القضايا التالية صحيحة:

1). تقاطع أي أسرة من الزمر الجزئية الناظمية في G هو زمرة جزئية ناظمية في G.

2). المجموعة: $Z(G)=\{a : a \in G, x.a=a.x, \forall x \in G\}$ والتي تسمى مركز الزمرة، هي زمرة جزئية ناظمية في G.

الإثبات:

1).. لتكن: $\ell$ أسرة من الزمر الجزئية الناظمية في G ولنفرض أنّ:

$$K = \bigcap_{B \in \ell} B$$

• ليكن: $a \in G$ ولنثبت أنّ: $[a.K.a^{-1} \subseteq K]$

• ليكن: $\boxed{x \in a.K.a^{-1}}$ ومنه يوجد: $h \in K$ بحيث:

$$x = a.h.a^{-1}$$

• بما أنّ: $h \in K = \bigcap_{B \in \ell} B$ فإنّ:

$$\forall B \in \ell : h \in B$$

$$x = a.h.a^{-1} \in a.B.a^{-1} \subseteq B$$

لأنّ $B$ زمرة جزئية ناظمية

$$\Rightarrow x \in B \quad , \forall B \in \ell$$

$$\Rightarrow \boxed{x \in K = \bigcap_{B \in \ell} B} \Rightarrow \{a.K.a^{-1} \subseteq K\}$$

ومنه: $K = \bigcap_{B \in \ell} B$ هي زمرة جزئية في $G$.

2) لدينا $Z(G)$ زمرة جزئية في $G$.

لنبرهن أنّ الزمرة $Z(G)$ ناظمية في $G$، ليكن: $c \in G$ ولنبرهن أنّ:

$$c^{-1}.Z(G).c \subseteq Z(G)$$

ليكن: $w \in c.Z(G).c^{-1}$ ومنه يكون يوجد: $u \in Z(G)$ بحيث يحقق:

$$w = c.u.c^{-1} = u.c.c^{-1} = u \in Z(G)$$

$$\Rightarrow w \in Z(G)$$

ومنه: $\boxed{c.Z(G).c^{-1} \subseteq Z(G)}$ ومنه: $Z(G)$ زمرة جزئية ناظمية في $G$.

---

نتيجة: إذا كانت الزمرة $G$ تبديلية فإنّ: $G = Z(G)$

---

مبرهنة: لتكن $G$ زمرة: $H, K$ زمر جزئية في $G$ عندئذٍ القضايا التالية صحيحة:

1) إذا كان: $H \subseteq K$ وكانت $H$ ناظمية في $G$ فإنّ: $H$ ناظمية في $K$.

2) إذا كان: $(G : H) = 2$ عندئذٍ يكون الزمرة الجزئية $H$ ناظمية في $G$.

الإثبات:

1) لنبرهن أنّ $H$ ناظمية في $K$: أي لنبرهن:

$$\forall k \in K \; ; \; k.H.k^{-1} \subseteq H$$

ليكن: $k_0 \in K$ عندئذٍ: $k_0 \in G$ ومنه حسب الفرض «$H$ ناظمية في $G$» يكون:

$$k_0.H.k_0^{-1} \subseteq H$$

وبالتالي: $H$ ناظمية في $K$.

2) لنفرض أنّ: $(G:H)=2$ أي يوجد مرافقين الأولى $H$ ولتكن الثانية: $a.H$

- نميز حالتين:

- $a \in H$ عندئذٍ: $a.H = H.a = H$ أي حسب التعريف تكون $H$ ناظمية في $G$.

(حسب مبرهنة سابقة)

- $a \notin H$ ومنه كون المرافقات تشكل تجزئة يكون:

$$G = H \cup a.H = H.a \cup H$$

$$\left.\begin{array}{l} a.H = G \setminus H \\ H.a = G \setminus H \end{array}\right\} \Rightarrow a.H = H.a$$

ومنه فإنّ: $H$ ناظمية في $G$.

---

وظيفة: أثبت أنّ عملية ضرب المحتويات في الزمرة عملية تبديلية

---

مبرهنة: لتكن $G$ زمرة، $A, B$ زمر جزئية في $G$ عندئذٍ الشروط التالية متكافئة:

1). $A.B$ زمرة جزئية في $G$.

2). $A.B = \langle A \cup B \rangle$

3). $A.B = B.A$

الإثبات:

$1) \Rightarrow 2)$: لنفرض أنّ: $A.B$ زمرة جزئية في $G$، لدينا:

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, a \in A : a = a.\underset{}{\overset{e\in B}{e}} \in A.B \\ \forall\, b \in B : b = \underset{e \in A}{e}.b \in A.B \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow A \cup B \subseteq A.B$$

لكن الزمرة المولدة بالاجتماع هي أصغر زمرة تحوي $A \cup B$ أي أنّ:

$$\boxed{\langle A \cup B \rangle \subseteq A.B}$$

• ليكن: $x \in A.B$ عندئذٍ يوجد $a \in A$ ، $b \in B$ بحيث:

$$x = a.b$$

• وبما أنّ: $a, b \in A\cup B$ فإنّ: $a.b \in A\cup B \subseteq \langle A\cup B \rangle$

$$\Rightarrow x = a.b \in \langle A\cup B \rangle$$

• ومنه فإنّ:

$$\boxed{A.B \subseteq \langle A\cup B \rangle}$$

• ومن الاحتوائين:

$$\{ A.B = \langle A\cup B \rangle \}$$

«$2 \Rightarrow 3$»:

• لنفرض أنّ: $A.B = \langle A\cup B \rangle$

• ليكن: $x \in A.B$ عندئذٍ يوجد: $a \in A$ ، $b \in B$ بحيث: $x = a.b$

ومنه: $x^{-1} \in A.B$ عندئذٍ يوجد: $a_1 \in A$ ، $b_1 \in B$ بحيث: $x^{-1} = a_1.b_1$

$$x = (x^{-1})^{-1} = (a_1.b_1)^{-1} = b_1^{-1}.a_1^{-1}$$

$$\Rightarrow x = b_1^{-1}.a_1^{-1} \in B.A \Rightarrow \boxed{A.B \subseteq B.A}$$

• ليكن: $y \in B.A$ عندئذٍ يوجد $a_2 \in A$ ، $b_2 \in B$ بحيث: $y = b_2.a_2$

ومنه: $y^{-1} \in B.A$ عندئذٍ يوجد $a_3 \in A$ ، $b_3 \in B$ بحيث: $y^{-1} = b_3.a_3$

$$y = (y^{-1})^{-1} = (b_3.a_3)^{-1} = a_3^{-1}.b_3^{-1}$$

$$\Rightarrow y = a_3^{-1}.b_3^{-1} \in A.B \Rightarrow \boxed{B.A \subseteq A.B}$$

ومن الاحتوائين: $\{A.B = B.A\}$

«$3 \Rightarrow 1$»: بما أنّ: $A , B$ ليستا خاليتين فالجداء ليس خالي:

$$e = e.e \in A.B$$

ليكن: $x, y \in A.B$ أي يوجد: $x = a_3.b_3$ ، $y = a_4.b_4$ حيث:

$$a_3, a_4 \in A \quad ، \quad b_3, b_4 \in B$$

$$x.y^{-1} = (a_3.b_3).(a_4.b_4)^{-1} = a_3.\underbrace{\overbrace{b_3.b_4^{-1}}^{\in B}.a_4^{-1}}_{\in B.A = A.B}$$

ومنه يوجد: $a_5 \in A$ ، $b_5 \in B$ بحيث:

$$a_3 . b_3 . b_4^{-1} . a_4 = a_3 . a_5 . b_5$$

$$\Rightarrow \quad x . y^{-1} = a_3 . a_5 . b_5 \in A . B$$

ومنه: $A . B$ زمرة جزئية في $G$.

---

ملاحظة:

لتكن: $G$ زمرة، $A$ ، $B$ زمرة جزئية في $G$ ، وإذا كانت $B$ ناظمية في $G$ عندئذ يكون:

1. $A . B$ زمرة جزئية في $G$.
2. $A . B = \langle A \cup B \rangle$.
3. $A . B = B . A$.

الإثبات:

1) لنفرض أن الزمرة الجزئية $B$ ناظمية في $G$ عندئذ:

$$\phi \neq A . B \subseteq G$$

ليكن: $x , y \in A . B$ عندئذ: $x = a_1 . b_1$ ، $y = a_2 . b_2$

حيث: $a_1 , a_2 \in A$ ، $b_1 , b_2 \in B$

$$x . y^{-1} = a_1 . b_1 . b_2^{-1} . a_2^{-1} = a_1 (b_1 . b_2^{-1}) . a_2^{-1}$$

$$= a_1 . e . (b_1 . b_2^{-1}) . a_2^{-1}$$

$$= \underbrace{a_1 . a_2^{-1}}_{\in A} . \underbrace{a_2 . (b_1 . b_2^{-1}) . a_2^{-1}}_{\subseteq B \text{ ناظمية}}$$

$$\Rightarrow \quad x . y^{-1} \in A . B$$

ومنه نكون: $A . B$ زمرة جزئية في $G$.

كل من (2) و(3) ينتج من (1) والمبرهنة الأخيرة.

---

انتهت المحاضرة