(غير متباين) $x_1 \neq x_2 : f(x_1) = f(x_2)$

من (5) و (6) نجد أن $y - x \in N \cap M_t = N \cap M_p$

$z = y - x \in M_p$

ومنه $y = z + x \in M_p$

$\in M_p \quad \in M_p$

أي $M_t \subset M_p$

ثانياً: المودولات الآرتينية.

تعريف.

نقول عن مودول M على حلقة R إنه يحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة إذا كان من أجل كل سلسلة متناقصة من المودولات الجزئية من M $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ يوجد عدد طبيعي n عند $M_n = M_k ; \forall k \geq n$

عندئذ M مودول ارتيني

تعريف.

نقول عن M انه يحقق شرط الأصغرية إذا كان من أجل كل أسرة غير خالية $\Gamma = \{M_i\}_{i \in I}$ من المودولات الجزئية من M يوجد عنصر أصغري فيها.

مبرهنة (بدون برهان) تكافؤ.

(I) M يحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة

(II) M يحقق شرط الأصغرية

انتهت المحاضرة

المحاضرة السابعة عشر

المودولات الحرة.

1- المودول الحر على مجموعة.

تعريف: ليكن M مودولاً على حلقة R

$S \neq \emptyset$ مجموعة غير خالية

نعرف المودول الحر على المجموعة S بأنه

ثنائية (F, f) : F مودول على حلقة R

$f : S \to F$ تطبيق

بحيث يتحقق من أجل أي مودول M على الحلقة وأي تطبيق $g : S \to M$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $h : F \to M$ ومن أجله يكون المخطط تبادلياً. بحيث

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & M \\ F \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd} \qquad h \circ f = g$$

مبرهنة.

إذا كان (F, f) مودولاً حراً على المجموعة $S \neq \emptyset$ فإن 1) f متباين

2) $F = \langle Im f \rangle$

الإثبات.

1) لنفرض جدلاً بأن f ليس متباين عندئذ يوجد $x_1, x_2 \in S$ بحيث

$\exists\; x_1 \neq x_2$ and $f(x_1) = f(x_2)$

بما أن (F, f) حر على S فإنه من أجل أي تطبيق $g : S \to M$ (حيث M مودولاً ما) يوجد تشاكل مودولي وحيد $h : F \to M$ يحقق $h \circ f = g$

(أي مجموعة جزئية تولد موددل)

$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$ تعريف التطبيق

SUBJECT: ______________________

عندئذٍ من أجل التطبيق g الذي يحقق من

أجل العنصرين $x_1 \neq x_2$ فإن $g(x_1) \neq g(x_2)$

وبالتالي يكون

$\cancel{g(x_1) \neq g(x_2)}$

$h(f(x_1)) = g(x_1) \neq g(x_2) = h(f(x_2))$

أي $h(f(x_1)) \neq h(f(x_2))$

وبما أن h تطبيق فيجب أن يكون

$f(x_1) \neq f(x_2)$

وهذا تناقض ⇐ f متباين

2) لنبرهن $\langle Imf \rangle = A$ (موددل جزئي من F)

ولنبرهن على أن $A = F$

لنأخذ المخطط

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f^{+}"] \arrow[d, "f"'] & Imf \arrow[r, "J_1"] & A \arrow[r, "J_2"] & F \\ F \arrow[urr, "h"] \arrow[urrr, "K = J_2 \circ h"'] & & & \end{tikzcd}$$

$f^{+} : S \to Imf$

$f^{+}(x) = f(x)$

و J_i ، $i = 1, 2$ التباين القانوني

وبما أن المودول (F, f) حر على S

فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: F \to A$

بحيث يكون $h \circ f = J_1 \circ f^{+}$

$K = J_2 \circ h : F \to F$

تشاكل مودولي وحيد يحقق

$K \circ f = J_2 \circ J_1 \circ f^{+}$

ومنه $(J_2 \circ h) \circ f = J_2 \circ J_1 \circ f^{+}$

ولكن بما أن (F, f) حر على S فإنه يوجد

تشاكل وحيد $V: F \to F$ يحقق

$V \circ f = J_2 \circ J_1 \circ f^{+}$

إن $V = I$ يحقق المطلوب وبالتالي

$J_2 \circ h = I$ أي J_2 غامر

ويكون J_2 متباين فإن J_2 تقابل (تماثل)

وينتج من ذلك أن $A = F$

فكرة البرهنة (2) طلب ① نبرهن أن J_2 غامر

② $J_2 \circ h = \overset{\text{مطابق}}{I}$

مبرهنة:

إذا كان (F, f) مودولاً حراً على مجموعة $S \neq \emptyset$

فإن القضيتين التاليتين متكافئتان

1) $(\bar{F}, \bar{f})$ مودول حر على S

2) يوجد تماثل $h: F \to \bar{F}$ بحيث $h \circ f = \bar{f}$

الإثبات:

$(1) \Rightarrow (2)$

بما أن $(\bar{F}, \bar{f})$ مودولاً حراً على S فإنه

من أجل المودول $\bar{F}$ والتطبيق $\bar{f}: S \to \bar{F}$

يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: F \to \bar{F}$

يحقق $h \circ f = \bar{f}$ (1)

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "f"'] & \bar{F} \\ F \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

كما أنه $(\bar{F}, \bar{f})$ مودول حر على S

فإنه من أجل المودول F والتطبيق $f: S \to F$ يوجد تشاكل مودولي

وحيد $K: \bar{F} \to F$

يحقق $K \circ \bar{f} = f$ (2)

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & F \\ \bar{F} \arrow[ur, "K"'] & \end{tikzcd}$$

من (1) و(2): $K \circ (h \circ f) = f$

$(K\circ h)\circ f = f$ (3)

وبما أن التطبيق المطابق هو الوحيد الذي
يجعل المخطط تبادلي اي $I\circ f = f$ (4)

فإن (3) and (4) and (I وحيد) $K\circ h = I$

وينتج من ذلك أن h متباين

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & F \\ F \arrow[ur, "I"'] & \end{tikzcd}$$

$h\circ(K\circ \bar f) = \bar f$ من (1) و (2) نجد

$(h\circ K)\circ \bar f = \bar F$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\bar f"] \arrow[d, "\bar f"'] & \bar F \\ \bar F \arrow[ur, "I \text{ وحيد}"'] & \end{tikzcd}$$

$(\bar F, \bar f)$ حر

$h\circ K = I$

ينتج من ذلك أن h غامر

$2 \Rightarrow 1$

أياً كانت M مجموعة ما و $g : S \to M$ تطبيق
ولنبرهن على وجود تطبيق وحيد $V : \bar F \to M$
يحقق $V\circ \bar f = g$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "\bar f"'] & M \\ & F \arrow[u, "K"'] \\ \bar F \arrow[ur, "h^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

وبما أن $h : F \to \bar F$ تقابل يحقق $h\circ f = \bar f$
فإن $h^{-1} : \bar F \to F$ تطبيق وحيد يحقق
$f = h^{-1}\circ \bar f$

وبما أن (F, f) حر على S فإنه يوجد
تطبيق وحيد $K : F \to M$