

$$(نير متباين) \quad x_1 \neq x_2 : f(x_1) = f(x_2)$$

SUBJECT: _____

/ 34 /

المحاضرة السابعة عشر

من (5) و (6) ينتج $y - x \in N \cap M_t = N \cap M_t$

$$z = y - x \in M_p$$

$$y = z + x \in M_p$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$E_{M_p} \quad E_{M_p}$$

$$M_t \subseteq M_p$$

ومنه

أي

ثانياً: المودولات الأرتينية

تعريف

المودولات الحرة ...
المودول الحر على مجموعة ...

تعريف: ليكن M مودولاً على حلقة R

$S \neq \emptyset$ مجموعة غير خالية

نعرف المودول الحر على المجموعة S بأنه

ثنائية (F, f) : f مودول على حلقة R

$$f : S \rightarrow F$$

حيث يتحقق من أجل أي مودول M على

الحلقة R وأي تطبيق $g : S \rightarrow M$

يوجد تشاكل مودولي $h : F \rightarrow M$

من أجله يكون المخطط تبادلياً حيث

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{g} & M \\ \downarrow f & \nearrow h & \\ F & & \end{array} \quad h \circ f = g$$

نقول عن مودول M على حلقة R إنه يحقق

شروط انقطاع السلاسل المتناقصة إذا كان

من أجل كل سلسلة متناقصة من المودولات

الجزئية من M

يوجد عدد طبيعي n عند $M_n = M_{n+1} = \dots$

عندئذ M مودول أرتيني

تعريف

نقول عن M أنه يحقق شرط الأصغرية إذا كان

من أجل كل أسرة غير خالية $\mathcal{F} = \{M_i\}_{i \in I}$

من المودولات الجزئية من M يوجد عندهم عنصري

فيها

مبرهنة (بدون برهان) تكافؤ

(I) M يحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة

(II) M يحقق شرط الأصغرية

مبرهنة

إذا كان (F, f) مودولاً حراً على المجموعة

$S \neq \emptyset$ فإن (1) متباين

$$F = \langle \text{Im} f \rangle \quad (2)$$

الإثبات

(1) لنفرض جديلاً بأن f ليس متباين

عندئذ يوجد x_1, x_2 حيث

$$\exists x_1 \neq x_2 \text{ and } f(x_1) = f(x_2)$$

وبما أن (F, f) مودولاً حراً على S فإنه من

أهل أي تطبيق $g : S \rightarrow M$ (حيث M

مودولاً ما) يوجد تشاكل مودولي h من

$$F \rightarrow M \quad h \circ f = g$$

انتهت المحاضرة

(أي مجموعة جزئية تولد مودول)

تعريف التطبيق $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

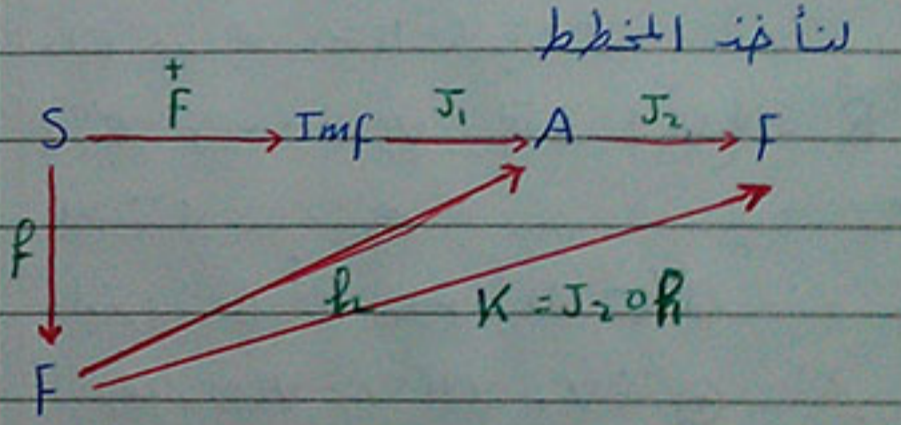
SUBJECT: _____

ومنه $(J_2 \circ h) \circ f^+ = J_2 \circ J_1 \circ f^+$
 ولكن بما أن (f, ρ) هي على S فإننا نوجد
 تشاكل وحيد $V: f \rightarrow f$ يحقق
 $V \circ f = J_2 \circ J_1 \circ f^+$
 إن $V = I$ - يحقق المطالب وبالتالي
 $J_2 \circ h = I$ أي J_2 عامر
 ويكون J_2 متباين فإن J_2 تقابل (تأمل)
 ونستج من ذلك أن $A = f$
 نظرية المبرهنة (2) - ^{طلب} نبيبرهان J_2 عامر
 $J_2 \circ h = I$ ^{مطابق}

مبرهنة:
 إذا كان (f, ρ) مودولاً عاماً على مجموعة $S \neq \emptyset$
 فإن القسطين التاليين متكافئان
 (1) $(\bar{f}, \bar{\rho})$ مودول حر على S
 (2) يوجد تماثل $h: f \rightarrow \bar{f}$ حيث $h \circ f = \bar{f}$
الإثبات:

(1) \Rightarrow (2)
 بما أن $(\bar{f}, \bar{\rho})$ مودولاً عاماً على S فإنه
 من أجل المودول \bar{f} والتطبيق $\bar{f}: S \rightarrow \bar{f}$
 يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: f \rightarrow \bar{f}$
 تحقق $h \circ f = \bar{f}$ (1)
 كما أنه $(\bar{f}, \bar{\rho})$ مودول حر على S
 فإنه من أجل المودول f والتطبيق
 $f: S \rightarrow f$ يوجد تشاكل مودولي
 وحيد $K: \bar{f} \rightarrow f$
 تحقق $K \circ \bar{f} = f$ (2)
 من (1) و(2): $K \circ (h \circ f) = f$

عندئذ من أجل التطبيق g الذي يحقق من
 أجل العنصرين $x_1 \neq x_2$ فإن $g(x_1) \neq g(x_2)$
 وبالتالي يكون
 ~~$h(x_1) \neq h(x_2)$~~
 $h(f(x_1)) = g(x_1) \neq g(x_2) = h(f(x_2))$
 أي $h(f(x_1)) \neq h(f(x_2))$
 وبما أن h تطبيق فيجب أن يكون
 $f(x_1) \neq f(x_2)$
 وهذا تناقض $\Leftarrow f$ متباين
 (2) لنبرهن $\langle \text{Im} f \rangle = A$ (مودول جزئي من f)
 ولنبرهن على أن $A = f$



$f^+: S \rightarrow \text{Im} f$
 $f^+(x) = f(x)$
 و $J_2: \text{Im} f \rightarrow f$ التباين القانوني
 وبما أن المودول (f, ρ) هي على S
 فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: \text{Im} f \rightarrow f$
 حيث يكون $h \circ f^+ = J_2$
 $K = J_2 \circ h: f \rightarrow f$
 تشاكل مودولي وحيد يحقق
 $K \circ f = f$

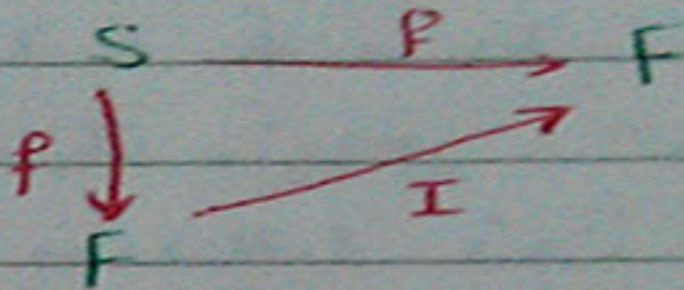
$$(K \circ h) \circ f = f \quad (3)$$

وبما أن التطبيق المطابق هو الوحد الذي

$$I \circ f = f \quad (4)$$

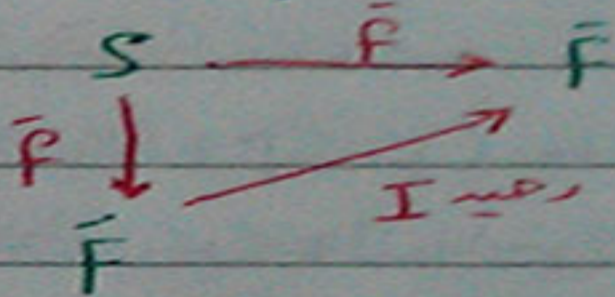
(I وحد) and (4) and (3) فإن $K \circ h = I$

ونتج من ذلك أن h متباين



$$h \circ (K \circ \bar{f}) = \bar{f} \quad \text{من (1) و (2) نجد}$$

$$(h \circ K) \circ \bar{f} = \bar{f}$$



(\bar{F}, \bar{F}) وحد

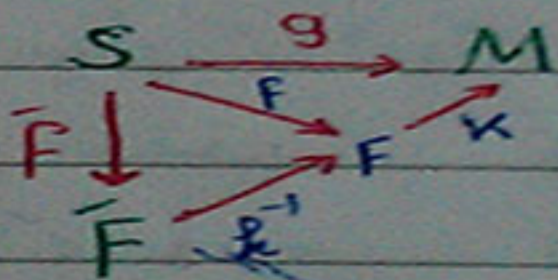
$$h \circ K = I$$

نتج من ذلك أن h عامر

$$2 \Rightarrow 1$$

أيًا كان M موجودًا ما $S \rightarrow M$ و g تطبيق

ولنرهن على وجود \bar{f} كل وجودي وحد



$$v: \bar{F} \rightarrow M$$

$$v \circ \bar{f} = g \quad \text{تحقق}$$

وبما أن $h: F \rightarrow \bar{F}$ متباين تحقق $h \circ \bar{f} = f$

فإن $h^{-1}: \bar{F} \rightarrow F$ متباين تحقق

$$f = \bar{f} \circ h^{-1}$$

وبما أن (F, F) وحد S فإنه يوجد

$$k: F \rightarrow M \quad \text{متباين كل وجودي وحد}$$