التاريخ: / /

الموضوع:

* مراجعة وحل تمارين

1) باستخدام الطريقة المباشرة أوجد جذر المعادلة:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 2.384 = 0$$

نجري التحويل: $x = z - \frac{a}{3}$

$\Rightarrow \boxed{x = z - 1}$

نوجد $f(z)$

$$f(z) = (z-1)^3 + 3(z-1)^2 + 7(z-1) + 2.384$$

$$(z^3 - 3z^2 + 3z - 1) + 3(z^2 - 2z + 1) + 7(z-1) + 2.384$$

$$z^3 + (-3+3)z^2 + (3-6+7)z + (-1+3-7+2.384) = 0$$

$$z^3 + 4z - 2.616 = 0$$

$\boxed{p = 4 \,,\; q = -2.616}$

$$z_0 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2.616}{2} + \sqrt{\frac{6.8434}{4} + \frac{64}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{2.616}{2} - \sqrt{\frac{6.8434}{4} + \frac{64}{27}}}$$

$$= \sqrt[3]{3.3282} + \sqrt[3]{-0.7122}$$

$$= 1.493 - 0.893 = 0.6$$

نعوض في *

$x = 0.6 - 1 \rightarrow \boxed{x = -0.4}$

AL ABRASH

الموضوع: التاريخ: / /

2\] باستخدام طريقة النقطة الثابتة أوجد جذر تقريبي للمعادلة

$$x^3+3x^2+7x+2.384=0$$

في المجال $[-1,0]$ بدقة $\varepsilon=0.035$

الحل:

$$g(x)=-\left(\frac{x^3+3x^2+2.384}{7}\right)-x=0$$

$g(0)=-0.3405<0$

$g(-1)=0.3737>0$

نلاحظ أن $g(a).g(b)<0$

وبالتالي يوجد حل للمعادلة $g(x)=0$ في المجال $[-1,0]$

وليكن α

لنفرض أن

$$f(x)=-\left(\frac{x^3+3x^2+2.384}{7}\right)$$

إن التابع $f(x)$ هو تابع قابل للاشتقاق على المجال $[-1,0]$

$\forall x\in[-1,0]$

إذا عوضنا هنا $x=0$ الجواب صفر وإذا عوضنا بـ -1 ينتج

$\frac{3}{7}$ ... $\frac{3}{7}$

$$|f'(x)|=\left|\frac{(3x^2+6x)}{7}\right|\le\frac{3}{7}<1$$

($3x^2+6x$ متناقص على $[-1,0]$)

وكذلك أن $f([-1,0])=[-0.6262,-0.3405]\subset[-1,0]$

وبالتالي أن $f(x)$ هو تابع تقلصي

وحسب مبرهنة النقطة الثابتة يوجد حل وحيد للمعادلة

$g(x)=0$ في المجال $[-1,0]$ $u_0=-0.5$

نضع العلاقة التكرارية

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{-(u_0^3 + 3u_0^2 + 2.384)}{7}$$

$$u_1 = \frac{-((-0.5)^3 + 3(-0.5)^2 + 2.384)}{7}$$

$$u_1 = -0.4298$$

$$u_2 = -\frac{((-0.4298)^3 + (-0.4298)^2 + 2.384)}{7}$$

$$u_2 = -0.4083$$

$$|u_2 - u_1| = 0.0215 < \varepsilon$$

ومنه $\alpha \approx u_2 = -0.4083$

3_ باستخدام طريقة تنصيف المجال أوجد جذر تقريبي $f(x) = \cos x \cdot e^x + 2 = 0$ في المجال $[1,2]$ بدقة $\varepsilon = 0.05$

الحل:

$$f(1) = \cos(1)\, e^{(1)} + 2 = 3.4686 > 0$$

$$f(2) = -1.0749 < 0$$

وبالتالي يوجد جذر للمعادلة $f(x)=0$ بالمجال $[1,2]$ ولكن

$$x_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5 \Rightarrow f(x_1) = 2.3170 > 0 \Rightarrow \alpha \in [1.5, 2]$$

$x_2 = \frac{1.5 + 2}{2} = 1.75 \Rightarrow f(x_2) = 0.9742 > 0$

$\Rightarrow \alpha \in [1.75 , 2]$

$x_3 = \frac{1.75 + 2}{2} = 1.875 \Rightarrow f(x_3) = 0.0467 > 0$

$\Rightarrow \alpha \in [1.875 , 2]$

$x_4 = \frac{1.875 + 2}{2} = 1.9375 \Rightarrow f(x) = -0.4587$

$\Rightarrow \alpha \in [1.875 , 1.9375]$

$x_5 = \frac{1.875 + 1.9375}{2} = 1.9062$

نلاحظ أن:

$|x_5 - x_4| = 0.0313 < \varepsilon$

ومنه $\alpha \simeq x_5 = 1.9062$

---

4) باستخدام طريقة القواطع أوجد جذراً تقريبياً للمعادلة:

$f(x) = 2\ln(x) + \sin x = 0$

في المجال $[0.5 , 1]$ بدقة $\varepsilon = 0.04$

نلاحظ أن:

$f(a) = f(0.5) = -0.9068 < 0$

$f(b) = f(1) = 0.8414 > 0$

ومنه يوجد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[0.5 , 1]$ وليكن α

$$x_1 = \frac{a \cdot f(b) - b\, f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{(0.5)(0.8414) - (1)(0.9068)}{0.8414 + 0.9068}$$

$$= 0.7593$$

$$f(x_1) = 0.1376 > 0$$

$$\alpha \in [0.5 , 0.7593]$$

$$x_2 = \frac{(0.5)(0.1376) + (0.7593)(0.9063)}{0.1376 + 0.9063} = 0.7251$$

$$|x_2 - x_1| = 0.0342 < \varepsilon$$

$$\alpha \simeq x_2 = 0.7251$$

باستخدام طريقة المماسات أوجد جذر تقريبي للمعادلة

$$f(x) = e^{x} \cdot \sin x + \cos x = 0$$

في $[-2 , -1]$ بدقة $\varepsilon = 0.03$

$f(-2) = -0.5392 < 0$, $f(-1) = 0.2307 > 0$

حيث $a = -2 , b = -1$

بما أنه $f(-2) f(-1) < 0$ أي انه يوجد جذر

للمعادلة $f(x) = 0$ المجال $[-2 , -1]$

ان $f(x)$ قابلة للاشتقاق على المجال $[-2 , -1]$

الموضوع: التاريخ: / /

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x - \sin x$$

نلاحظ أن $f(-1) = 0.2307$ أقرب إلى الصفر من $f(-2) = -0.5392$

ومنه تكون نقطة الانطلاق $b = -1$

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \qquad f'(b) = f'(-1) = 0.7306$$

$$x_1 = -1 - \frac{(0.2307)}{0.7306} = -1.3157 \Rightarrow f(x_1) = -0.0072$$

$$f'(x_1) = 0.7757 \Rightarrow x_2 = -1.3157 - \frac{(-0.0072)}{0.7757}$$

$$= -1.3064$$

نلاحظ أن $|x_2 - x_1| = 0.0093 < \varepsilon$

$$\Rightarrow \alpha \simeq x_2 = -1.3064$$

تمارين الفصل الثاني :

6] باستخدام طريقة لاغرانج أوجد حدودية الاستيفاء للدالة التالية $y=f(x)=\frac{x^2+2}{x+1}$

عند النقاط $1, 2, 3$

ثم احسب بشكل تقريبي $f(1.5)$ والخطأ المرتكب.

الحل:

x	1	2	3
$f(x)$	1.5	2	2.75

نوجد حدوديات لاغرانج:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-2)(x-3)}{(-1)(-2)}$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-5x+6)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$$

$$=-(x^2-4x+3)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-1)(x-2)}{(1)(2)}$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-3x+2)$$

نطبق قانون لاغرانج

$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

$$= 1.5\left(\tfrac{1}{2}(x^2-5x+6)\right) + 2(-x^2+4x-3)$$
$$+ 2.75\left(\tfrac{1}{2}(x^2-3x+2)\right)$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 0.125x^2 + 0.125x + 1.25$$

$$P(1.5) \simeq P_2(1.5) = 1.7187$$

الخطأ المرتكب:

حذف هذا الطلب

$$|\bar{e}(x)| \leq \frac{M \cdot |w(x)|}{(n+1)!}$$

$$M = \max \left| f^{(n+1)}(\lambda) \right| \; ; \quad x_0 \leq \lambda \leq x_n$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 - 1}{(x+1)^2}$$

باستخدام الطريقة العامة أوجد حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y=f(x)$ المعرف بالجدول:

x	1	2	4
y	-2	4	22

نلاحظ أن الحدودية من الدرجة الثانية حيث من الجدول:

الموضوع:

$$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

نعوض:

$$a_2 + a_1 + a_0 = -2$$
$$4a_2 + 2a_1 + a_0 = 4$$
$$16a_2 + 4a_1 + a_0 = 22$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 22 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6 \Rightarrow a_2 = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 16 & 22 & 1 \end{vmatrix} = -18 \Rightarrow a_1 = 3$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 16 & 4 & 22 \end{vmatrix} = 36 \Rightarrow a_0 = -6$$

ومنه:

$$P_2(x) = x^2 + 3x - 6$$

الموضوع: التاريخ: / /

7] باستخدام طريقة نيوتن الأمامية أوجد حدودية الاستيفاء للتابع $y = f(x) = \cos x$

المعرف عند النقاط $0, 0.1, 0.2, 0.3$

ثم احسب بشكل تقريبي $f(0.15)$ والخطأ المرتكب.