الفصل الخامس: التفاضل العددي

نعرف المعادلة التفاضلية من المرتبة n بأنها:

كل معادلة من الشكل $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

ونقول عن هذه المعادلة أنها قابلة للحل بالنسبة للمشتق الأعلى رتبة

إذا أمكننا كتابتها على الشكل

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

ونقول عن التابع $y = \varepsilon(x)$ أنه حل للمعادلة التفاضلية السابقة

إذا كان

$$\varepsilon^{(n)}(x) = f(x, \varepsilon(x), \varepsilon'(x), \varepsilon^{(n-1)}(x))$$

ونقول عن التابع $y = \varepsilon(x)$ أنه حل عام للمعادلة التفاضلية

إذا كان $y = \varepsilon(x)$ يحوي n وسيط مستقل أي

$$y = \varepsilon(x, c_1, \dots, c_n)$$

فإذا أعطينا n شرط ابتدائي عند النقطة x_0 كما يلي:

$$y(x_0) = y_0 \ , \ y'(x_0) = y'_0 \ , \dots , \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

ثابت مستقل وليس مشتق — هذه ثوابت وليس مشتق

هذه الشروط تحقق المعادلة السابقة

نحصل على n معادلة بـ n مجهول $c_1, \dots, c_n$

وبحلها نحصل على الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

مثال: أثبت أن $y = y(x) = e^x + c_1x + c_2$ حل عام للمعادلة التفاضلية $y'' = e^x$ ثم أوجد الحل الخاص الذي يحقق $y(0) = 0$ ، $y'(0) = 1$

الحل:

نلاحظ أن $y' = e^x + c_1$

$y'' = e^x$ محققة

$$y(0) = 0 \xRightarrow[x=0]{\text{بالتعويض}} 0 = e^0 + c_1(0) + c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = -1}$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow 1 = e^{(0)} + c_1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

ومنه الحل الخاص الذي يحقق الشروط الابتدائية السابقة هو

$$y = e^x - 1$$

الحل الشاذ هو حل لا ينتج من الحل [illegible]

سوف نهتم بدراستنا بالطرق العددية لحل معادلة تفاضلية من المرتبة الاولى والمحلولة بالنسبة للمشتق ونذكر منها

أولاً: طريقة التقريب المباشر

* نفرض $y' = f(x, y)$ معادلة تفاضلية مزودة بشرط ابتدائي ونفرض $y(x_0) = y_0$

$$x_{i+1} - x_i = h \quad ; i = 0, 1, 2, \ldots$$

* نكامل طرفي المعادلة التفاضلية فنجد:

$$\int_{x_0}^{x} y' \, dx = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x)) \, dx$$

ومنه حل المعادلة التفاضلية بطريقة التقريب المباشر يعطى بالقانون

التاريخ: / / الموضوع:

$$\boxed{y(x_{i+1}) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_{i+1}} f(x, y(x_i))\,dx \qquad \text{حيث } i = 0,1,2,\dots}$$

للحفظ

باستخدام طريقة التقريب المباشر أوجد حل تقريبي للمعادلة التفاضلية

$$y' = x . y$$

حيث $h = 0.1$; $y(0) = 1$

في المجال $[0, 0.2]$

الحل:

$$(x_0, y_0) = (0,1) \Longrightarrow$$

x_1 ← نعوضها حسب التزايد أي بمقدار h

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_0)\,dx$$

$$= 1 + \int_0^{0.1} x(1)\,dx = 1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{0.1} = 1.005$$

$$(x_1, y_1) = (0.1, 1.005) \Longrightarrow$$

$$y(x_2) = y_0 + \int_{x_0}^{x_2} f(x, y_1)\,dx$$

$$= 1 + 1.005\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{0.2} = 1.0201$$

$$\Longrightarrow (x_2, y_2) = (0.2, 1.0201)$$

ومنه

x	0	0.1	0.2
y	1	1.005	1.0201

ملاحظة: بالعودة للتمرين السابق نجد

$\frac{dy}{dx} = x \cdot y$ معادلة قابلة للفصل

ومنه $\frac{dy}{y} = x \cdot dx$ بمكاملة الطرفين

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + c$$

$$e^{\frac{x^2}{2}+c} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{c}$$

e^{c} = c عدد ثابت

لذلك كتبنا $c e^{\frac{x^2}{2}}$

$$\Longrightarrow \boxed{y = c e^{\frac{x^2}{2}}}$$

من الشرط الابتدائي $y(0) = 1$ نجد

$$1 = c\, e^{(0)} \Rightarrow c = 1$$

ومنه الحل الخاص الذي يحقق الشرط الابتدائي

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$\boxed{\text{نحقق}}$

$y(0) = 1$

$y(0.1) = 1.005$ نلاحظ أن الحل الفعلي طابق الحل الموجود سابقا

$y(0.2) = 1.0202$ أما هنا فرق 0.1

تمرين (د): باستخدام طريقة التقريب المباشر أوجد حل تقريبي للمعادلة التفاضلية

$$y' = x^2 + 4x - \frac{1}{2}y$$

حيث $y(0) = 4$ ؛ $h = 0.5$ في المجال $[0, 1]$

الحل:

$(x_0, y_0) = (0, 4)$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_0)\, dx$$

$$y_1 = 4 + \int_0^{0.5} \left(x^2 + 4x - \tfrac{1}{2}(4)\right) dx$$

$$= 4 + \left[\tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 2x\right]_0^{0.5}$$

$$= 3.5416$$

$(x_1, y_1) = (0.5, 3.5416)$

$$y_2 = y_0 + \int_0^1 f(x_1, y_1)\, dx$$

$$= 4 + \int_0^1 \left(x^2 + 4x - \tfrac{1}{2}(3.5416)\right) dx$$

$$= 4 + \left[\tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \tfrac{1}{2}(3.5416)\,x\right]_0^1$$

$$= 4.5625$$

$(x_2, y_2) = (1, 4.5625)$

x	0	0.5	1
y	4	3.5416	4.5625

$\frac{dy}{y^2} = dx \sin x$

وظيفة: باستخدام طريقة التقريب المباشر أوجد حل تقريبي للمعادلة التفاضلية $y' = y^2 \sin x$

$y(0) = 1$ ، $h = 0.1$

في المجال $[0 , 0.2]$