البرمجة الديناميكية

مقدمة:

* تختلف البرمجة الديناميكية عن البرمجة الخطية بعدم وجود نموذج عام لحل هذه المسائل بل إن كل نوع من المسائل له نموذج مناسب له.

تكمن فكرة البرمجة الديناميكية في كون دالة الهدف عبارة عن دالة عودية مع حالة ابتدائية، ويتم من خلالها تجزئة المسألة وحلها بأجزاء متراكبة حتى نصل إلى الحل الكامل.

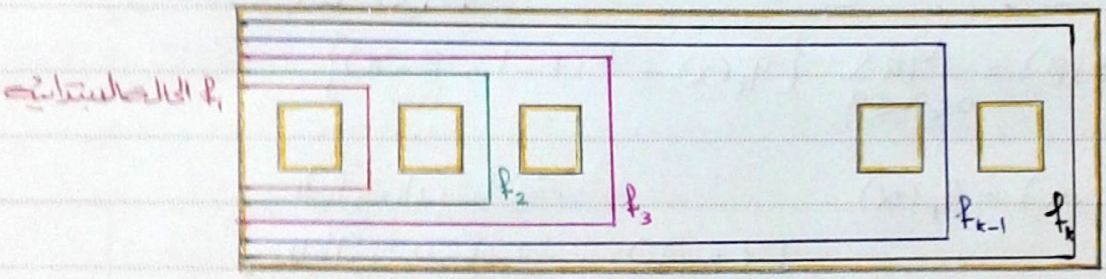
* ونميز حالتين:

1 النموذج التقدمي:

الدالة العودية لها الشكل: $f_n = g(f_{n-1}) \quad ; 1 < n \leq k$

والحالة الابتدائية f_1 تكون معطاة.

المطلوب هنا هو إيجاد f_k بدلالة f_{k-1} التي هي بدلالة f_{k-2} وهكذا إلى أن نصل إلى الحالة الابتدائية المعطاة f_1، نعوضها بما يساويها ونحصل على حل المسألة ككل.

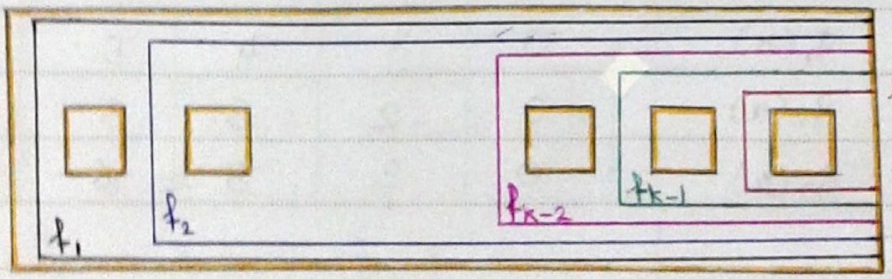


2 النموذج التراجعي:

الدالة العودية لها الشكل: $f_n = g(f_{n+1}) \quad ; 1 \leq n < k$

والحالة الابتدائية f_k تكون معطاة.

المطلوب هو إيجاد f_1 بدلالة f_2 التي هي بدلالة f_3 وهكذا إلى أن نصل إلى الحالة الابتدائية المعطاة f_k، نعوضها بما يساويها ونحصل على حل المسألة ككل.



Scanned by CamScanner

* يمكن نمذجة المسائل الديناميكية بأحد النموذجين التقدمي أو التراجعي
ولكن في بعض الحالات نفضل نموذجاً على آخر حسب سهولة تحديد الحالة الابتدائية.
وسندرس ثلاث مسائل شهيرة في البرمجة الديناميكية.

مسألة ضخ الغاز على آبار النفط:

لنفرض أن لدينا n بئر نفط، لاستخراج النفط نحن بحاجة إلى ضخ الغاز.
فإذا كانت الكمية المتوفرة لدينا من الغاز هي b.
وكانت $q_t(x)$ هي كمية النفط المستخرجة من البئر t إذا ضخ له x وحدة من الغاز.
فما هي كمية الغاز التي يجب أن نضخها في كل بئر للحصول على أكبر كمية ممكنة من النفط؟

- كتابة النموذج الديناميكي لهذه المسألة:

سوف نختار النموذج التقدمي ونعرف التابع $F(t,\beta)$ الذي يعبّر عن أكبر كمية نفط مستخرجة من الآبار من 1 وحتى t حيث β هي كمية الغاز المتوفرة.
فإن النموذج الديناميكي هو:

$$F(t,\beta) = \max_{0 \le x \le \beta} \{q_t(x) + F(t-1, \beta - x)\}$$

الحالة الابتدائية: $F(1,x) = q_1(x)$

المطلوب هو إيجاد $F(n,b)$.

مثال: ليكن لدينا ثلاث آبار نفط، وكمية الغاز المتوفرة هي 3 وحدات.
وكمية النفط المستخرجة من كل بئر تبعاً لكمية الغاز المضخوخ معطاة بالجدول التالي:

الآبار \ كمية الغاز المضخوخ	0	1	2	3
$q_1(x)$	0	3	4	5
$q_2(x)$	0	2	5	5
$q_3(x)$	0	3	5	6

Scanned by CamScanner

المطلوب : توزيع كمية الغاز المتوفرة على الآبار لاستخراج أكبر كمية ممكنة من النفط.

1) اكتب النموذج الرياضي.

2) أوجد الحل الأمثل.

الحل : 1) النموذج الرياضي :

$$F(t,\beta) = \max_{0 \le x \le \beta} \{ q_t(x) + F(t-1, \beta - x) \}$$

حيث : $F(1,\alpha) = q(\alpha)$

المطلوب إيجاد : $F(3,3) = ?$

2)

$$F(3,3) = \max_{0 \le x \le 3} \{ q_3(x) + F(2, 3-x) \}$$

$$= \max \{ q_3(0) + F(2,3), q_3(1) + F(2,2), q_3(2) + F(2,1), q_3(3) + F(2,0) \}$$

لإيجاد ذلك نحن بحاجة لحساب $F(2,3), F(2,2), F(2,1), F(2,0)$

ولتسهيل ذلك نكتب الجدول التالي :

	الحسابات	أكبر كمية نفط مستخرجة	كمية الغاز المصروف لتحقيق ذلك
$F(1,x)$	$= q_1(x)$	$q_1(x)$	$0 \le x \le 3$
$F(2,3)$	$= \max_{0 \le x \le 3} \{ q_2(0) + F(1,3), q_2(1) + F(1,2), q_2(2) + F(1,1), q_2(3) + F(1,0) \}$ $= \max \{ 0+5, 2+4, 5+3, 5+0 \} = 8$	8	2
$F(2,2)$	$= \max_{0 \le x \le 2} \{ q_2(0) + F(1,2), q_2(1) + F(1,1), q_2(2) + F(1,0) \}$ $= \max \{ 0+4, 2+3, 5+0 \} = 5$	5	2 أو 1

Scanned by CamScanner

$F(2,1) = \underset{0\leq x\leq 1}{Max}\{0+3, 2+0\} = 3$		3	0
$F(2,0) = \underset{0\leq x\leq 0}{Max}\{0+0\} = 0$		0	0
$F(3,3) = Max\{0+8, 3+5, 5+3, 6+0\} = 8$		8	0 أو 1 أو 2

نلاحظ أن لدينا ثلاث حلول مثلى لأن القيمة الأخيرة 8 تأتي إما من ضخ 0 أو 1 أو 2 وحدة في البئر الثالث.

لنناقش الحالة الأولى: ضخ 0 وحدة غاز في البئر الثالث يعني ضخ ثلاث واحدات في البئرين الأول والثاني أي $F(2,3)$. ولكن قيمة $F(2,3)$ أتت من ضخ وحدتين في البئر الثاني والتي تعني ضخ وحدة واحدة في البئر الأول أي $F(1,1)$.

وهكذا يكون الحل الأمثل الأول: ضخ 1 وحدة غاز للبئر الأول
وضخ 2 وحدة غاز للبئر الثاني.
وضخ 0 وحدة غاز للبئر الثالث.

وبنفس الطريقة نوجد الحل الأمثل الثاني:
ضخ 1 أو 0 وحدة غاز للبئر الأول
وضخ 1 أو 2 وحدة غاز للبئر الثاني.
وضخ 1 وحدة غاز للبئر الثالث.

وهذا الحل فعلياً هو عبارة عن حلين.

أما الحل الأمثل الثالث فهو:
ضخ 1 وحدة غاز للبئر الأول.
وضخ 0 وحدة غاز للبئر الثاني.
وضخ 2 وحدة غاز للبئر الثالث.

Scanned by CamScanner