

المحاضرة الحادية عشر

(II ⇒ I)

التمرين الأول

المطلوب إثبات أن من أجل أي مودول  $M$

ليكن  $f: M \rightarrow N$  تشاكلاً مودولياً

وأجرة تشاكلات  $g_i: M_i \rightarrow M$  يوجد

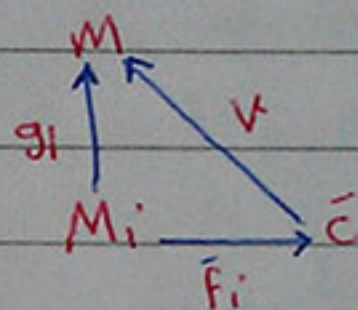
ولكن  $A, B$  مودولين جزئيين من

تشاكل مودولي  $v: \bar{C} \rightarrow M$  يحقق

$M, N$  على الترتيب أثبت أنه يوجد

$$v \circ \bar{f}_i = g_i$$

تشاكل مودولي وحيد



$$h: M/A \rightarrow N/B$$

عندما فقط عندما  $\bar{f}(A) \subseteq B$

وجاءت  $(C, (f_i)_{i \in I})$  جراد مرافق للأجرة

ثم أثبت أن

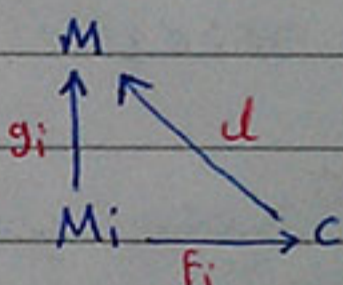
$(M_i)_{i \in I}$  فإنه من أجل المودول  $M$  والأجرة

$$A = \bar{f}(B) \Leftrightarrow h \text{ متباين}$$

$$\text{Im } f + B = N \Leftrightarrow h \text{ غامر}$$

$(g_i)_{i \in I}$

الحل



يوجد تشاكل مودولي وحيد

$$d: C \rightarrow M$$

$$d \circ f_i = g_i \text{ حيث}$$

$$h: C \rightarrow \bar{C} \text{ جاءت}$$

$$\bar{h}: \bar{C} \rightarrow C \text{ فإن}$$

وبالتالي يوجد تشاكل وحيد

$$v: d \circ \bar{h}: \bar{C} \rightarrow M$$

$$v \circ \bar{f}_i = (d \circ \bar{h}) \circ \bar{f}_i \text{ تحقق}$$

$$= d \circ (\bar{h} \circ \bar{f}_i) \text{ حيث } \bar{h} \circ \bar{f}_i = \bar{f}_i$$

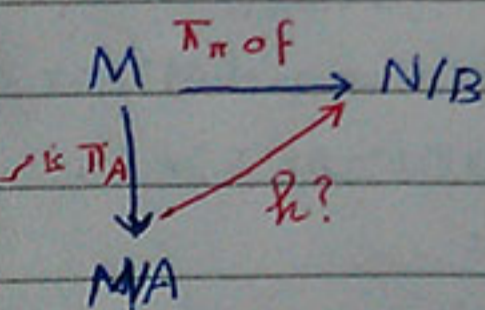
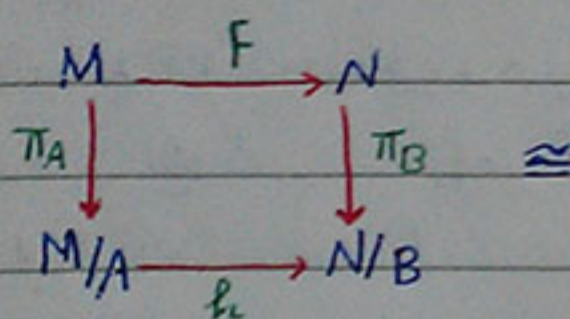
$$= d \circ f_i \text{ حيث } f_i = \bar{h} \circ \bar{f}_i$$

$$= g_i$$

لدينا

$$\forall x \in \text{Ker } \pi_A \Leftrightarrow \pi_A(x) = A$$

$$\Leftrightarrow x + A = A \Leftrightarrow x \in A; x \in M \quad (1)$$



يوجد تشاكل مودولي وحيد

$$h: M/A \rightarrow N/B$$

عندما فقط عندما يكون

$$\text{Ker } \pi_A \subseteq \text{Ker } (\pi_B \circ f)$$

SUBJECT: \_\_\_\_\_

تمرين (2)

$\text{Ker } \pi_A = A$

لتكن  $(M_i)_{i=1, \dots, n}$  أسرة مودولات على حلقة  $R$ .  
 أثبت أن  $(\prod_{i=1}^n M_i)$  و  $(P_i)_{i=1, \dots, n}$  أسرة product للأسرة  $(M_i)_{i=1, \dots, n}$ .

$\forall x \in \text{Ker } \pi_B \text{ of } f \Leftrightarrow (\pi_B \circ f)(x) = B$   
 $; x \in M$

الحل

$\Leftrightarrow \pi_B (f(x)) = B \text{ و } x \in M$

$\Leftrightarrow f(x) + B = B$

$\Leftrightarrow f(x) \in B \quad (2)$

$(\text{Ker } \pi_A \subseteq \text{Ker } (\pi_B \circ f)) \Leftrightarrow \vec{f}(A) \subseteq B$

$\prod_{i=1}^n M_i = \{(m_1, m_2, \dots, m_n); m_i \in M_i\}$   
 $P_{R/K} = \prod_{i=1}^n M_i \rightarrow M_K$   
 $(m_1, m_2, \dots, m_n) \rightarrow m_K$

لإثبات المطلوب يكفي أن نثبت

$h: M/A \rightarrow N/B$

$h(x+A) = f(x) + B$

لنرهن على أن  $h$  متباين  $A = \vec{f}(B)$

$\text{Ker } h = \{x+A \in M/A : h(x+A) = B\}$

$= \{x+A \in M/A : f(x) + B = B\}$

$= \{x+A \in M/A : f(x) \in B\}$

$= \vec{f}(B) / A$

$\text{Ker } h = \vec{f}(B) \Leftrightarrow h$  متباين

$\vec{f}(B) = A \Leftrightarrow$

(2)

$\text{Im } f + B = N \Leftrightarrow h$  عام

$N/A \xrightarrow{h} N/B \Leftrightarrow h$  عام

$[\forall n \in N : \exists x \in M : h(x+A) = n+B]$

$\Leftrightarrow [\forall n \in N : \exists x \in M : f(x) + B = n+B]$

$f(x) - n \in B ; b \in B \Leftrightarrow$

$N = \text{Im } f + B \Leftrightarrow$

أنه من أجل أي مودول  $M$  وأية أسرة  $\{A_k\}$  لكل مودول  $(g_i : M \rightarrow M_i)_{i=1, \dots, n}$  يوجد تشاكل مودولي

$h: M \rightarrow \prod_{i=1}^n M_i$

تحقق

$P_i \circ h = g_i$

لنأخذ العلاقة

$h: M \rightarrow \prod_{i=1}^n M_i$

$h(m) = (g_1(m), g_2(m), \dots, g_n(m))$

ففي أن

$h$  تطبيق، لأنه إذا كان  $m, \bar{m} \in M$  حيث

$g_i(m) = g_i(\bar{m}) \quad \forall i \text{ فإن } m = \bar{m}$

$(g_i(m))_{i=1, \dots, n} = (g_i(\bar{m}))_{i=1, \dots, n}$

$\Rightarrow h(m) = h(\bar{m})$

لنأخذ في المودول  $\prod M_i$  مجموعة جزئية  
 $S$  المؤلفه من جميع العناصر  $(m)$   
 التي جميع مساقطها أصفياً باستثناء عدد  
 منته منهن

$$S = \{ (m_i)_{i \in I} \in \prod M_i ; \text{card}(\{i \in I \mid m_i \neq 0\}) < \infty \}$$

فتجد أن  $S$  مودول جزئي من  $\prod M_i$   
 ريسن المجموع المبا شر الخارجي للأسرة  
 $\bigoplus_{i \in I} M_i$  ويرمز له بـ  $(M_i)_{i \in I}$   
 فإن

$$in_k: M_k \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$$

$$in_i: (m_k) = (m_i)_{i \in I}$$

$$m_i = 0 \quad \forall i \neq k$$

$$m_i = m_k \quad ; \quad i = k$$

$$\text{فإن } I = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\bigoplus_{i=1}^n M_i = \prod_{i=1}^n M_i$$

أثبت أن

$$\text{هذا مرافق } (\bigoplus_{i=1}^n M_i, (in_i)_{i=1, \dots, n})$$

$$\text{للأسرة } (M_i)_{i=1, \dots, n}$$

قاعدة الربط

$$h: \bigoplus_{i=1}^n M_i \rightarrow M$$

$$h(m_1, \dots, m_n) = \sum_{i=1}^n g_i(m_i)$$

(2) تحقق شرطي التماثل المودولي

أي كان  $m, \bar{m} \in M$  و  $\alpha \in R$  فإن

$$h(\alpha m + \bar{m}) = (g_1(\alpha m + \bar{m}), g_2(\alpha m + \bar{m}), \dots, g_n(\alpha m + \bar{m}))$$

$$= (\alpha g_1(m) + g_1(\bar{m}), \alpha g_2(m) + g_2(\bar{m}), \dots, \alpha g_n(m) + g_n(\bar{m}))$$

$$= \alpha (g_1(m), g_2(m), \dots, g_n(m)) + (g_1(\bar{m}), g_2(\bar{m}), \dots, g_n(\bar{m}))$$

$$= \alpha h(m) + h(\bar{m})$$

(3) وإن  $h$  تحقق  $pr_i \circ h = g_i \quad \forall i=1, \dots, n$

لأنه أي كان  $m \in M$  فإن

$$(pr_i \circ h)(m) = pr_i(h(m))$$

$$= pr_i(g_1(m), g_2(m), \dots, g_n(m))$$

$$= g_i(m) \quad \forall i=1, \dots, n$$

(4) الوحدانية

نفرض أنه يوجد تماثل مودولي آخر

$$K: M \rightarrow \prod_{i=1}^n M_i$$

حيث تحقق

$$pr_i \circ K = g_i \quad \forall i=1, \dots, n$$

$$h(m) = K(m)$$

زبد برهان

$$(h(m))_i = (K(m))_i$$

بطبي أن ثبت أن

$$g_1(m), \dots, g_n(m) = pr_i(h(m))$$

$$\forall i=1, \dots, n$$

$$(h(m))_i = g_i(m) = (K(m))_i$$

$$h(m) = K(m)$$

تمرين (وظيفة)