$(II \Rightarrow I)$

المطلوب إثبات أنه من أجل أي مودول M وأسرة تشاكلات $g_i : M_i \to M$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $v : \bar{C} \to M$ يحقق $v \circ \bar{f}_i = g_i$

$$\begin{tikzcd} & M \\ M_i \arrow[u, "g_i"] \arrow[r, "\bar{f}_i"'] & \bar{C} \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

وبما أن $(C, (f_i)_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإنه من أجل المودول M والأسرة $(g_i)_{i\in I}$

$$\begin{tikzcd} & M \\ M_i \arrow[u, "g_i"] \arrow[r, "f_i"'] & C \arrow[ul, "d"'] \end{tikzcd}$$

يوجد تشاكل مودولي وحيد

$d : C \to M$

بحيث $d \circ f_i = g_i$

بما أن $h : C \to \bar{C}$ تماثل وحيد

فإن $h^{-1} : \bar{C} \to C$ موجود ووحيد

وبالتالي يوجد تشاكل وحيد

$v := d \circ h^{-1} : \bar{C} \to M$

يحقق $v \circ \bar{f}_i = (d \circ h^{-1}) \circ \bar{f}_i$

$= d \circ (h^{-1} \circ \bar{f}_i)$ تقابل $h \circ f_i = \bar{f}_i$

$= d \circ f_i$ $f_i = h^{-1} \circ \bar{f}_i$

$= g_i$

المحاضرة الحادية عشر

التمرين الأول:

ليكن $f : M \to N$ تشاكلاً مودولياً وليكن A, B مودولين جزئيين من M, N على الترتيب. أثبت أنه يوجد تشاكل مودولي وحيد

$h : M/A \to N/B$

عندما وفقط عندما $\vec{f}(A) \subseteq B$

ثم أثبت أن

$A = \overleftarrow{f}(B) \Leftrightarrow$ h متباين

$Im f + B = N \Leftrightarrow$ h غامر

الحل:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_A"'] & N \arrow[d, "\pi_B"] \\ M/A \arrow[r, "h"'] & N/B \end{tikzcd} \quad \simeq$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi_B \circ f"] \arrow[d, "\pi_A"', "\text{غامر}"] & N/B \\ M/A \arrow[ur, "h?"'] & \end{tikzcd}$$

يوجد تشاكل مودولي وحيد

$h : M/A \to N/B$

عندما وفقط عندما يكون

$Ker \pi_A \subseteq Ker(\pi_B \circ f)$

لدينا:

$\forall x \in Ker \pi_A \Leftrightarrow \pi_A(x) = A$

$\Leftrightarrow x + A = A \Leftrightarrow x \in A ; x \in M$ (1)

h غامر

SUBJECT:

$\ker \pi_A = A$

.

$\forall x \in \ker \pi_B \circ f \Leftrightarrow (\pi_B \circ f)(x) = B \; ; x \in M$

$\Leftrightarrow \pi_B(f(x)) = B \; ; x \in M$

$\Leftrightarrow f(x) + B = B$

$\Leftrightarrow f(x) \in B$ (2)

$(\ker \pi_A \subseteq \ker(\pi_B \circ f)) \Leftrightarrow \vec{f}(A) \subseteq B$

$h : M/A \longrightarrow N/B$

$h(x+A) = f(x) + B$

لنبرهن على أنّ h متباين $\Leftrightarrow A = \overleftarrow{f}(B)$

$\ker h = \{x+A \in M/A \; ; \; h(x+A) = B\}$

$= \{x+A \in M/A \; ; \; f(x) + B = B\}$

$= \{x+A \in M/A \; ; \; f(x) \in B\}$

$= \overleftarrow{f}(B)/A$

$\ker h = \overleftarrow{f}(B) \Leftrightarrow$ h متباين

$\overleftarrow{f}(B) = A \Leftrightarrow$

(2

$\mathrm{Im} f + B = N \Leftrightarrow$ h غامر

$N/A \xrightarrow{h} N/B \Leftrightarrow$ h غامر

$[\forall n \in N ; \exists x \in M ; h(x+A) = n + B]$

$\forall n \in N : \exists x \in M : f(x) + B = n + B] \Leftrightarrow$

$f(x) - n \in B \; ; b \in B \Leftrightarrow$

$N = \mathrm{Im} f + B \Leftrightarrow$

تمرين (2).

لتكن $(M_i)_{i=1,\dots,n}$ أسرة موديولات على حلقة R

أثبت أنّ $(\prod_{i=1}^{n} M_i, (pr_i)_{i=1,\dots,n})$ جداء product للأسرة $(M_i)_{i=1,\dots,n}$

الحل.

$\prod_{i=1}^{n} = \{(m_1, m_2, \dots, m_n) \; ; \; m_i \in M_i\}$

$pr_k : \prod_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow M_k$

$(m_1, m_2, \dots, m_n) \longmapsto m_k$

لإثبات المطلوب يكفي أن نثبت

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g_i"] \\ \prod_{i=1}^{n} M_i \arrow[r, "pr_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

أنه من أجل أي موديول M وأية أسرة تشاكلات $(g_i : M \longrightarrow M_i)_{i=1,\dots,n}$ يوجد تشاكل موديولي

$h : M \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} M_i$

يحقق

$pr_i \circ h = g_i$

لنأخذ العلاقة

$h : M \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} M_i$

$h(m) = (g_1(m), g_2(m), \dots, g_n(m))$

فنجد أنّ

1- h تطبيق، لأنه إذا كان $m, m' \in M$ بحيث $m = m'$ فإنّ $g_i(m) = g_i(m')$

$(g_i(m))_{i=1,\dots,n} = (g_i(m'))_{i=1,\dots,n}$

$\Rightarrow h(m) = h(m')$

2) h يحقق شرطي التشاكل المودولي

أي إذا كان $m, m' \in M$ و $\alpha \in R$ فإن

$h(\alpha m + m') = (g_1(\alpha m + m'), g_2(\alpha m + m'), \dots, g_n(\alpha m + m'))$

$= (\alpha g_1(m) + g_1(m'), \alpha g_2(m) + g_2(m'), \dots, \alpha g_n(m) + g_n(m'))$

$= \alpha(g_1(m), g_2(m), \dots, g_n(m)) + (g_1(m'), g_2(m'), \dots, g_n(m'))$

$= \alpha h(m) + h(m')$

3) وإن h يحقق $pr_i \circ h = g_i \; \forall i=1,\dots,n$

لأنه إذا كان $m \in M$ فإن

$(pr_i \circ h)(m) = pr_i(h(m))$

$= pr_i(g_1(m), g_2(m), \dots, g_n(m))$

$= g_i(m) \quad \forall i=1 \dots n$

4) الوحدانية.

نفرض أنه يوجد تشاكل مودولي آخر

$K: M \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} M_i$

بحيث يحقق

$pr_i \circ K = g_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

$h(m) = K(m)$ نبرهن

$(h(m))_i = (K(m))_i$ يكفي أن نثبت أن

$g_1(m) \dots g_n(m) = pr_i(h(m))$

$\forall i = 1, \dots, n$

$(h(m))_i = g_i(m) = (K(m))_i$

$h(m) = K(m)$

تمرين (وظيفة)

لنأخذ في المودول $\prod M_i$ مجموعة جزئية S المؤلفة من جميع العناصر $(m_i)_{i\in I}$ التي جميع مساقطها أصفاراً باستثناء عدد منته منها

$S = \{(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \, ; \, card(m_i \neq 0) < \infty\}$

فنجد أن S مودول جزئي من $\prod_{i\in I} M_i$

يسمى المجموع المباشر الخارجي للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ ونرمز له بـ $\bigoplus_{i\in I} M_i$

فإن

$in_k: M_k \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i$

$in_i: (m_k) = (m_i)_{i\in I}$

$m_i = 0 \quad \forall i \neq k$ بحيث

$m_i = m_k \; ; \; k = i$

فإن $I = \{1, 2, \dots, n\}$

$\bigoplus_{i=1}^{n} M_i = \prod_{i=1}^{n} M_i$

أثبت أن

$(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i, (in_i)_{i=1,\dots,n})$ جداء مرافق

للأسرة $(M_i)_{i=1,\dots,n}$

قاعدة الربط

$h: \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow M$

$h(m_1, \dots, m_n) = \sum_{i=1}^{n} g_i(m_i)$