مباراة الشخصين ذات المجموع غير الصفري: Non-Zero-Sum Game

هي مباراة يكون فيها دخل كل لاعب منفصلاً عن دخل باقي اللاعبين في المباراة، ويكون مصفوفة الدخل هنا عبارة عن ثنائيات (a_{ij}, b_{ij}).

1 الاستراتيجية الصرفة:

وهي أن يختار اللاعب الأول الاستراتيجية الموافقة للقيمة (العظمى - الدنيا) في مصفوفة الدخل أي: $\underset{i}{Max}\ \underset{j}{Min}\ a_{ij}$

وأن يختار اللاعب الثاني الاستراتيجية الموافقة للقيمة (العظمى - الدنيا) في مصفوفة الدخل أي: $\underset{j}{Max}\ \underset{i}{Min}\ b_{ij}$

2 الاستراتيجية المختلطة:

هنا سوف يختلف توقع ربح أحد اللاعبين عن توقع خسارة الآخر.
لذلك فنحن مضطرون لحساب توقع ربح كل من اللاعبين على حدة.

$\pi_R(p,q)$ = توقع ربح اللاعب الأول بحيث p هو احتمال اختيار اللاعب الأول للسطر الأول و q احتمال اختيار اللاعب الثاني للعمود الأول.

$\pi_C(p,q)$ = توقع ربح اللاعب الثاني بحيث p هو احتمال اختيار اللاعب الأول للسطر الأول و q احتمال اختيار اللاعب الثاني للعمود الأول.

ونوجد الاستراتيجية المختلطة لكل لاعب من عبارة توقع ربحه بعد كتابتها بالشكل المناسب.

* منحنيات أفضل استجابة للاعبين:

نوجد $R_R(q)$ أفضل استجابة للاعب السطري بنفس الطريقة من عبارة توقع ربحه وذلك حسب قيم $0 \le q \le 1$

ونوجد $R_C(p)$ أفضل استجابة للاعب العمودي بنفس الطريقة من عبارة توقع ربحه وذلك حسب قيم $0 \le p \le 1$.

/ /

مثال: لتكن لدينا مصفوفة الدخل التالية:

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\
\begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} & \begin{bmatrix} (1,0) & (0,\boxed{-1}) \\ (-2,\frac{-9}{5}) & (1,\frac{+1}{5}) \end{bmatrix}
\end{array}$$

① أوجد الاستراتيجية الصرفة لكل من اللاعبين.

② أوجد الاستراتيجية المختلطة لكل من اللاعبين وارسم منحنيات أفضل استجابة.

③ هل هناك نقاط توازن في المباراة؟ (هل تحقق موازنة ناش Nash؟).

الحل: ١) اللاعب الأول:

$$\underset{i}{Max}\ \underset{j}{Min}\ a_{ij} = Max\{0,-2\} = 0$$

اللاعب الثاني:

$$\underset{j}{Max}\ \underset{i}{Min}\ b_{ij} = Max\left\{\frac{-9}{5}, -1\right\} = -1$$

أي أن الاستراتيجية الصرفة هي:

أن يختار اللاعب السطري السطر الأول ويضمن ألا يخسر أي شيء.

وأن يختار اللاعب العمودي العمود الثاني ويضمن أن يخسر 1 على الأكثر

② لإيجاد الاستراتيجية المختلطة نحسب توقع الربح لكل لاعب:

$$* \quad \pi_R(p,q) = pq - 2q(1-p) + (1-p)(1-q)$$

$$= pq - 2q + 2pq + 1 - p - q + pq$$

$$= 4pq - p - 3q + 1$$

ولكن نريد أن نكتب التوقع بالشكل:

$$\pi_R(p,q) = \delta(p-\alpha)(q-\beta) + \gamma$$

$$= (-\beta\delta)p + (-\alpha\delta)q + \delta pq + \beta\alpha\delta + \gamma$$

بالمطابقة نحصل على 4 معادلات بأربعة مجاهيل، بحلها نحصل على الشكل:

$$\pi_R(p,q) = 4\left(p-\frac{3}{4}\right)\left(q-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}$$

/ /

* $\pi_c(p,q) = -p(1-q) - \frac{9}{5}q(1-p) + \frac{1}{5}(1-p)(1-q)$

$= -p + pq - \frac{9}{5}q + \frac{9}{5}pq + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}p - \frac{1}{5}q + \frac{1}{5}pq$

$= +3pq - \frac{6}{5}p - 2q + \frac{1}{5}$

بنفس الطريقة يمكن كتابة هذا التوقع بالشكل :

$$\pi_c(p,q) = +3\left(p-\frac{2}{3}\right)\left(q-\frac{2}{5}\right) - \frac{2}{5}$$

ومنه فالاستراتيجية المختلطة :

أن يختار اللاعب الأول السطر الأول بمعدل $p = \frac{3}{4}$ ويضمن أن يربح بالمتوسط $\frac{1}{4}$ على الأقل

وأن يختار اللاعب الثاني العمود الأول بمعدل $q = \frac{2}{5}$ ويضمن أن يخسر بالمتوسط $\frac{2}{5}$ على الأكثر.

منحنيات أفضل استجابة :

$R_R(q)$: إذا كانت $q > \frac{1}{4}$ أفضل استجابة للاعب الأول $p=1$

وإذا كانت $q < \frac{1}{4}$ أفضل استجابة للاعب الأول $p=0$

أما إذا كانت $q = \frac{1}{4}$ لا تتغير قيمة π_R مهما كانت p .

$R_c(p)$: إذا كانت $p > \frac{2}{3}$ أفضل استجابة للاعب الثاني $q=1$

وإذا كانت $p < \frac{2}{3}$ أفضل استجابة للاعب الثاني $q=0$

أما إذا كانت $p = \frac{2}{3}$ لا تتغير قيمة π_c مهما كانت q .

3) في الاستراتيجية الصرفة تحقق متوازنة ناش لأن اللاعبين سيختاران نفس الخيار.

أما في الاستراتيجية المختلطة فنلاحظ أنه توجد لدينا ثلاث نقاط توازن :

- نقطة توازن مختلطة : $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{4}$
- نقطتي توازن صرفتين : $q = 0$, $p = 1$

$q = 1$, $p = 0$