الحالة الثانية: هي أن يكون عدد الزبائن في النظام أكبر أو يساوي عدد قنوات الخدمة، أي $n \geq c$.

عندئذٍ يكون لدينا:

$$\lambda_0 = \lambda \qquad u_1 = u$$
$$\lambda_1 = \lambda \qquad u_2 = 2u$$
$$\lambda_2 = \lambda \qquad u_3 = 3u$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$u_c = cu$$
$$u_{c+1} = cu$$
$$u_{c+2} = cu$$
$$\vdots$$
$$\lambda_{n-1} = \lambda \qquad u_n = cu$$

أي إذا كان لدينا في النظام $n = c+k$ ، في هذه الحالة تكون جميع قنوات الخدمة تعمل، ويبقى k زبون في رتل الانتظار، عندئذٍ يصبح احتمال انتظار الزبون n:

$$P_n = \frac{\lambda}{u} \cdot \frac{\lambda}{2u} \cdots\cdots \frac{\lambda}{cu} \cdot \underbrace{\frac{\lambda}{cu} \cdot \cdots\cdots \cdot \frac{\lambda}{cu}}_{n-c \text{ مرة}} P_0$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{u}\right)^n \cdot \frac{1}{c!} \left(\frac{1}{c}\right)^{n-c} P_0$$

$$\Longrightarrow \boxed{P_n = \frac{\rho^n}{c!\, c^{n-c}} P_0}$$

إن P_0 هنا هي نفسها القيمة التي حصلنا عليها في الحالة الأولى، وأصبح لدينا قانونين لحساب P_n حسب قيمة n.

$n \leq c \Leftarrow$ الحالة الأولى

$n \geq c \Leftarrow$ الحالة الثانية

ونلاحظ أنه عندما تكون $n = c$ سيتطابق القانونان.

* يُحسب عدد الزبائن في رتل الانتظار بالعلاقة :

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c) P_n$$

حيث $n-c$ هو عدد الزبائن الزائد عن عدد قنوات الخدمة c

P_n يمثل احتمال وجود الزبون n في رتل الانتظار .

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c) \frac{\rho^n}{c^{n-c}\, c!} P_0$$

$$\Longrightarrow L_q = \frac{P_0}{c!} \rho^c \underbrace{\sum_{n=c}^{\infty} (n-c) \left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c}}_{I}$$

إن مجموع السلسلة I هو :

$$I = \frac{\frac{\rho}{c}}{\left(1-\frac{\rho}{c}\right)^2}$$

$$L_q = \frac{P_0\, \rho^c}{c!} \left(\frac{\frac{\rho}{c}}{\left(1-\frac{\rho}{c}\right)^2} \right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{L_q = P_0 \frac{\rho^{c+1}}{c\, c!} \left(\frac{1}{\left(1-\frac{\rho}{c}\right)^2} \right)}$$

* متوسط زمن الانتظار في رتل الانتظار :

$$L_q = \lambda W_q \Longrightarrow W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

* متوسط الزمن المتوقع في النظام :

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \quad \star$$

* متوسط عدد الزبائن في مركز الخدمة :

$$L_s = \lambda W_s$$

$$\star \Longrightarrow \lambda W_s = \lambda W_q + \frac{\lambda}{\mu} \Longrightarrow \boxed{L_s = L_q + \rho}$$

إن المقادير الأربعة السابقة منطبقة فيما بينها ، أي معرفة أحدها يؤدي إلى معرفة البقية .

/ /

مثال :

لدى مركز خدمة هاتف ثلاث خطوط هاتف .

يصل الزبائن إلى مركز الخدمة عشوائياً حسب توزيع بواسون وبمعدل 12 زبون في الساعة .

زمن المكالمة متغير عشوائي يختلف من زبون لآخر ويكون حسب توزيع أسي بمعدل 10 دقائق لكل مكالمة ، المطلوب :

1) متوسط عدد الزبائن في مركز الخدمة .

2) متوسط زمن الانتظار لكل زبون .

3) أوجد احتمال وجود خط جاهز للاستخدام .

4) أوجد احتمال وجود خط واحد على الأقل جاهز للاستخدام .

الحل : عدد قنوات الخدمة : $c = 3$

معدل الوصول : $\lambda = 12$

معدل الخدمة : $\mu = \frac{60}{10} = 6$

$$\Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{6} = 2$$

1) متوسط عدد الزبائن في مركز الخدمة :

$$L_s = L_q + \rho$$

$$L_q = P_0 \underbrace{\frac{\rho^{c+1}}{c\,c!} \left(\frac{1}{(1-\frac{\rho}{c})^2} \right)}_{I}$$

$$I = \frac{2^4}{3 \cdot 3!} \left(\frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} \right) = 8$$

$$\Rightarrow L_q = 8\,P_0$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{c+1}}{(c-\rho)c!}} = \frac{1}{II}$$

/ /

$$\Pi = \sum_{n=0}^{3} \frac{2^n}{n!} + \frac{2^4}{(3-2)3!}$$

$$\Pi = \frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{3!} = 9$$

$$\Longrightarrow P_0 = \frac{1}{9} \Longrightarrow L_q = \frac{8}{9}$$

$$L_s = \frac{8}{9} + 2 = \frac{26}{9}$$

2) متوسط زمن الانتظار:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{8}{9}}{12} = \frac{2}{27}$$

3) عند عدم وجود أي زبون يكون 3 خطوط من أصل 3 جاهزة للاستخدام.
عند وجود زبون واحد يكون 2 خط من أصل 3 جاهز للاستخدام.
عند وجود زبونين يكون 1 خط من أصل 3 جاهز للاستخدام
وفي حال وجود عدد زبائن أكثر من ذلك ستكون كل الخطوط مشغولة، وبالتالي يكون احتمال وجود خط جاهز للاستخدام هو:

$$P = 1.P_0 + \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2$$

$$P_1 = P_0 \cdot u = \frac{1}{9} \cdot 2 = \frac{2}{9} \quad , \quad P_2 = P_0 \cdot \frac{u^2}{2!} = \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{2} = \frac{2}{9}$$

$$\Longrightarrow P = 1 \cdot \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

4) عند عدم وجود أي زبون يوجد خط واحد على الأقل جاهز للاستخدام.
عند وجود زبون واحد يوجد خط واحد على الأقل جاهز للاستخدام
عند وجود زبونين يوجد خط واحد على الأقل جاهز للاستخدام.
وفيما عدا ذلك لن يتحقق وجود خط واحد على الأقل جاهز للاستخدام.

$$P' = 1.P_0 + 1.P_1 + 1.P_2 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$