مثال: أوجد الحل العام $y''=y+1$

هذه المعادلة لا تحوي x

نفرض $y'=Z$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dZ}{dx}=\frac{dZ}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$y''=Z'Z$$

نعوض في المعادلة التفاضلية

$$Z'Z=y+1$$

$$\frac{dZ}{dy}\cdot Z=y+1$$

معادلة ذات متحولات قابلة للفصل

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية إذا علمت أن أحد حلولها من الشكل

$$y=e^{ax}$$

$$y''-3y'+2y=0$$

نعين a

$$y=e^{ax}\quad , y'=ae^{ax}\quad , y''=a^2e^{ax}$$

نعوض في المعادلة

$$a^2e^{ax}-3ae^{ax}+2e^{ax}=0$$

لكن $e^{ax}\neq 0$

$$a^2-3a+2=0$$

$$(a-1)(a-2)=0$$

$$a-1=0 \Rightarrow a=1$$

$$a-2=0 \Rightarrow a=2$$

إذاً الحلول الخاصة

$$y_1 = e^x \qquad , y_2 = e^{2x}$$

إذاً يجب أن يكون y_1 و y_2 مستقلة خطياً

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} \neq 0$$

إذاً الحلول مستقلة خطياً وبالتالي

$$\boxed{y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}}$$

إذا ما كانت مستقلة لا يوجد حل عام

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0$$ علماً أنها تقبل حلين خاصين

$$y_1 = x \qquad , y_2 = e^x$$

$$y_1 = x \qquad , y_1' = 1 \qquad , y_1'' = 0$$

$$(x-1)(0) - x(1) + x = 0$$

$$y_2 = e^x \qquad , y_2' = e^x , y_2'' = e^x$$

$$(x-1)e^x - xe^x + e^x = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = xe^x - e^x \neq 0$$

إذاً مستقلة خطياً إذاً الحل العام

$$\boxed{y = c_1 x + c_2 e^x}$$

المعادلات ذات الأمثال الثابتة

① إذا كانت جذور المعادلة المميزة حقيقية مختلفة

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \dots \neq \lambda_n$$

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}, \quad \dots \quad y_n = e^{\lambda_n x}$$

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

② إذا كانت الجذور عقدية (مركبة)

$$\lambda_1 = a + ib \quad , \quad \lambda_2 = a - ib$$

$$e^{\lambda_1 x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}\left[\cos bx + i \sin bx\right]$$

$$e^{\lambda_2 x} = e^{(a-ib)x} = e^{ax}\left[\cos bx - i \sin bx\right]$$

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = c_1 e^{(a+ib)x} + c_2 e^{(a-ib)x}$$

$$y = e^{ax}\left[\underbrace{(c_1 + c_2)}_{A} \cos bx + \underbrace{i(c_1 - c_2)}_{B} \sin bx\right]$$

$$y = e^{ax}\left[A \cos bx + B \sin bx\right]$$

③ إذا كانت المعادلة المميزة تملك جذور مكررة: إذا كانت المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية تملك جذور حقيقية مكررة

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = b$$

فإن الحلول من الشكل $\left(e^{\lambda_i x}\right)$ $(1 \leq i \leq n)$

تعطي حلاً فقط $\left(e^{bx}\right)$ وبالتالي يجب العلاج

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

$$y_1 = e^{bx}, \quad y_2 = x e^{bx}, \quad y_n = x^{n-1} e^{bx}$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

/ /

لا تعطي الحل العام للمعادلة التفاضلية وهي تكون المعادلة المميزة من الشكل

$$F(\lambda) = (\lambda - b)^n$$

بالامتحان الانتبه الكتابة بالتفصيل :)

مثال:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

المعادلة المميزة

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^3 = 0$$

$\lambda = 1$ مكرر ثلاث مرات

الحلول الخاصة

$$y_1 = e^x$$

$$y_2 = xe^x$$

$$y_3 = x^2 e^x$$

الحل العام

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x .$$

إذا كانت المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية جذر مركب مطابق من الشكل $(\alpha + i\beta)$ (مضاعف) مكرر m مرة وبالتالي تكون الحلول الخاصة

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} \quad , y_2 = x e^{(\alpha + i\beta)x} \quad \dots$$

مثال:

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \mp i$$

مكرر مرتين

أكرم رضا

$$y = (c_1 + c_2 x)\cos x + (c_1 + c_2 x)\sin x$$

$$y_1 = e^{ix}$$

$$y_2 = x e^{ix}$$

$$y_3 = e^{-ix}$$

$$y_4 = x e^{-ix}$$

$a = 0$, $b = 1$

$\lambda_1 = 0 + i$,

$\lambda_2 = 0 - i$

ـ تمارين

① $y'' - y' - 2y = 0$

$y'' - 2y' = 0$

$y''' - y'' - 12y' = 0$

حل

$y'' - y' - 2y = 0$ المعادلة المميزة

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2 \quad , \lambda_2 = -1$$

$$\Rightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{2x}$$

$$\wedge \; y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{-x} \Rightarrow$$

الحل العام

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

الرهبة أمام السبورة...