الأحد: 23/11/2014

المحاضرة الثالثة عشر:

تمرينات الفصل الأول:

1/125 لتكن $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ ثلاث تمثيلات وسيطية معرفة كما يلي:

$$\vec{r}_1(t) = \left(a\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2at}{1+t^2}, 2b\,Arc\,tg\,t\right) \quad ; \quad -\infty < t < +\infty$$

$$\vec{r}_2(\tau) = (a\cos\tau, a\sin\tau, b\tau) \quad ; \quad -\infty < \tau < +\infty$$

$$\vec{r}_3(u) = (a\cos u, a\sin u, bu) \quad ; \quad -\pi < u < +\pi$$

المطلوب:

1. هل $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ تمثل منحنيات هندسية؟
2. إلى أي صنف تنتمي كلاً من التمثيلات السابقة؟
3. هل $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ متكافئتان؟ علل إجابتك؟ (هل $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ تمثيلان لمنحني ذاته)
4. أثبت أن $\vec{r}_1, \vec{r}_3$ متكافئتان؟

الحل:

1) إن $\vec{r}_1$ تمثل منحنياً هندسياً لأنه:

- $\vec{r}_1$ معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ لأن كل من مركباتها مستمرة على $\mathbb{R}$
- في المركبة الثالثة يجب الانتباه إلى أن هذه الدالة

$Arc\,tg : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ وحيدة القيمة (أي أنه تابع

عكسي مقصور لـ $tg(\,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\,)$

أما الدالة:

$$arc\,tg : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k\} \quad \text{متعددة القيمة.}$$
$$x \longmapsto arc\,tg\,x + \pi k$$

ـ إن الدالة $\vec{r}_1$ متباينة على $\mathbb{R}$ (مغمر متباينة محلياً) لأن المركبة الثالثة لها وهي $Arctg\, t$ متباينة على $\mathbb{R}$ لأنها متزايدة تماماً لأن: $(Arctg\, t)' = \frac{1}{1+t^2} > 0$

المركبة $\vec{r}_1$ لا تمثل قوس بسيط لأن المجال مفتوح وغير محدود }

ـ بنفس الأسلوب نبرهن أن $\vec{r}_2 , \vec{r}_3$ تمثل منحنيات هندسية.

2 جميع التمثيلات من الصنف C^∞ لأن جميع المركبات لهذه التمثيلات من الصنف C^∞ لأن هذه المركبات قابلة للاشتقاق عدد غير منته من المرات والمقام لا ينعدم.

3 نفرض جدلاً أن $\vec{r}_1 \sim \vec{r}_2$ وهذا يقتضي وجود دالة مستمرة وغامرة ومتزايدة تماماً

بحيث

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\tau \longmapsto \phi(\tau)$$

حيث $\vec{r}_1(\phi(\tau)) = \vec{r}_2(\tau)$ لأجل كل $\tau \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \left(a\frac{1-\phi^2(\tau)}{1+\phi^2(\tau)} , \frac{2a\phi(\tau)}{1+\phi^2(\tau)} , 2b\, Arctg\, \phi(\tau) \right) = \left(a\cos\tau , a\sin\tau , b\tau \right)$$

إذن ϕ السابقة تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} \Rightarrow a\dfrac{1-\phi^2(\tau)}{1+\phi^2(\tau)} = a\cos\tau \\ \Rightarrow \dfrac{2a\,\phi(\tau)}{1+\phi^2(\tau)} = a.\sin\tau \\ \Rightarrow 2b\, Arctg\, \phi(\tau) = b\tau \end{cases} \Rightarrow \boxed{\phi(\tau) = tg\,\frac{\tau}{2}}$$

ϕ غير معرفة على $\mathbb{R}$ (منطلقة $\vec{r}_2$)

$\Leftarrow$ تناقض مع الفرض الجدلي فإذن ومنه $\vec{r}_1 \nsim \vec{r}_2$

4- إنّ $\phi(u) = tg\frac{u}{2}$ معرفة ومستمرة ومتزايدة تماماً وغامرة من $]-\pi, \pi[$ إلى $\mathbb{R}$

حيث إنّ $\cos\frac{u}{2}$ لا ينعدم على $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

متزايدة لأنّ:

$$\phi'(u) = \frac{1}{2}\left(1 + tg^2\frac{u}{2}\right) > 0 \quad \forall u \in]-\pi, \pi[$$

لنثبت أنّ: $\vec{r}_1(\phi(u)) \overset{?}{=} \vec{r}_3(u) \quad \forall u \in]-\pi, \pi[$

$$\vec{r}_1(\phi(u)) = \vec{r}_1\left(tg\frac{u}{2}\right) = \left(a.\frac{1 - tg^2\frac{u}{2}}{1 + tg^2\frac{u}{2}},\ 2a\frac{tg\frac{u}{2}}{1 + tg^2\frac{u}{2}},\ 2b\,Arctg\left(tg\frac{u}{2}\right)\right)$$

$$= (a\cos u,\ a\sin u,\ bu) = \vec{r}_3(u)$$

$\Leftarrow$ $\vec{r}_1$ تكافئ $\vec{r}_3$.

طريقة ثانية لحل الطلب -3- :

إنّ $b > 0$; $-\frac{\pi}{2} < Arctg\,t < +\frac{\pi}{2}$.

$$\Rightarrow -b\pi < 2b\,Arctg\,t < \pi b$$

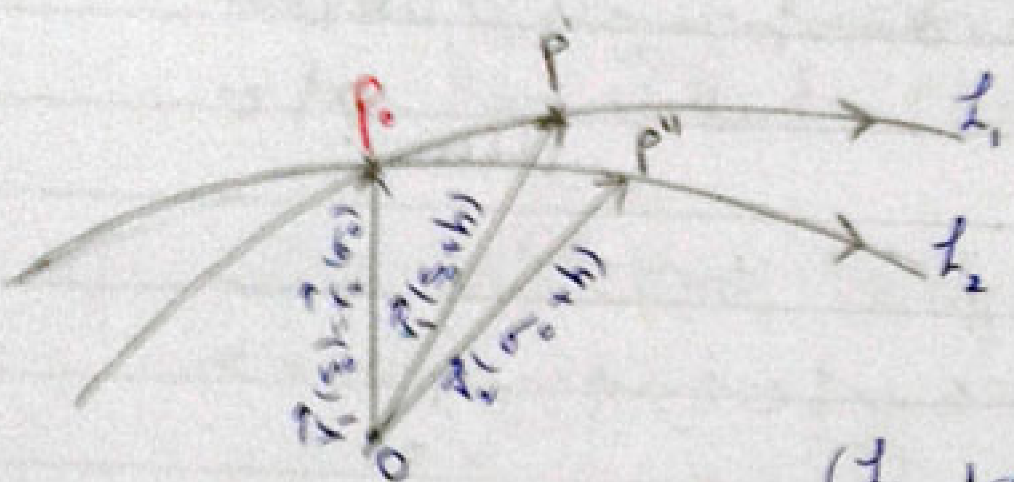
لنأخذ $\tau = 3\pi \Leftarrow$: $\vec{r}_2(\tau) = \vec{r}_2(3\pi) = (-a, 0, 3b\pi)$

$\Leftarrow$ هذا يعني أنّ $(-a, 0, 3b\pi)$ هي نقطة من المجموعة النقطية لـ $\vec{r}_2$ ولكنها ليست نقطة من المجموعة النقطية لـ $\vec{r}_1$ لأنّ $3b\pi > \pi b$.

$\Leftarrow$ $\vec{r}_1 \nsim \vec{r}_2$ حسب الملاحظة: للتمثيلين المتكافئين المجموعة النقطية نفسها.

- إنّ التمثيل $\vec{r}_2$ هو عبارة عن تمثيل وسيطي لمنحني اللولب، والتمثيل $\vec{r}_3$ تمثيل وسيطي لجزء من منحني اللولب أي هو عبارة عن قوس مفتوح من منحني اللولب.
- إنّ التمثيل $\vec{r}_1$ لا يمثل منحني اللولب لأنّ $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ غير متكافئين، لكنه $\vec{r}_1$ يمثل قوس مفتوح من اللولب لأنّ $\vec{r}_1, \vec{r}_3$ متكافئين.
- إنّ $\vec{r}_2 \nsim \vec{r}_3$ وضوحاً لأنّ ϕ لن تكون غامرة

تلامس منحنيين :



لتكن P_0 نقطة مشتركة للمنحنيين L_1 , L_2 حيث $\vec{OP_0} = \vec{r_1}(s_0)$ ($\vec{r_1}$ تمثيل طبيعي لـ L_1)

وبما أن P_0 نقطة مشتركة للمنحنيين فإن $\vec{OP_0} = \vec{r_2}(\sigma_0)$ حيث ($\vec{r_2}$ تمثيل طبيعي لـ L_2)

ولنفترض أن P' نقطة من L_1 و P'' نقطة من L_2 بحيث يكون فرق قيمتي الوسيط الطبيعي المقابلتين للنقطتين P_0 و P' على L_1 مساوياً لفرق قيمتي الوسيط الطبيعي المقابلتين للنقطتين P_0 و P'' على L_2 ولنفترض أنه يساوي h.

ما يعني أن القوسين P_0P' و P_0P'' طولهما مساوٍ لـ h ($P_0P'' = P_0P'$)

$h = s - s_0 = \sigma - \sigma_0$ (على الشكل المرسوم)

وأن النقطتين P', P'' تقعان في جهة تزايد الوسيط الطبيعي بالنسبة لـ P_0 عندما تكون $h > 0$ وفي الجهة المعاكسة عندما تكون $h < 0$

تعريف :

نقول إن لـ L_2 , L_1 تلامساً من المرتبة n عند P_0 إذا :

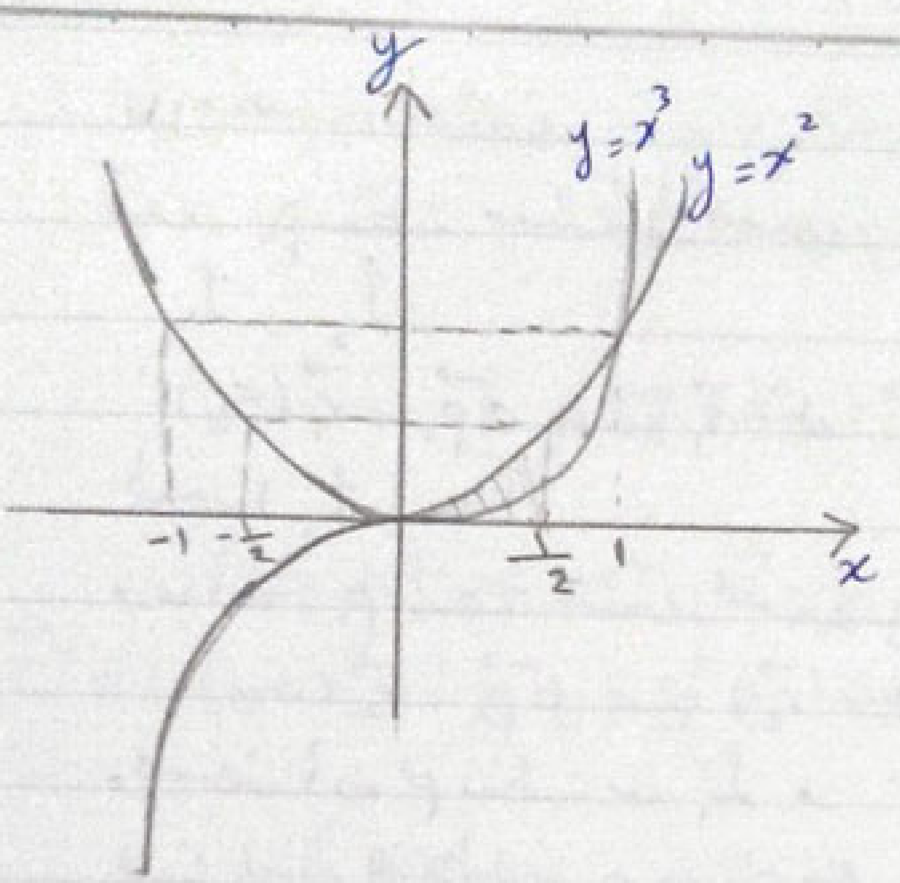
$\vec{P'P''} = o(h^n)$ و $\vec{P'P''} \neq o(h^{n+1})$ في جوار $h=0$ (أي عندما $h \to 0$ أو $P', P'' \to P_0$)

حيث $o(h^n)$ لا متناهٍ في الصغر من المرتبة n بالنسبة إلى h.

مراجعة :

$$\frac{\vec{P'P''}}{h^n} \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \iff \vec{P'P''} = o(h^n) \text{ في جوار } h=0$$

$$\frac{\vec{P'P''}}{h^{n+1}} \not\xrightarrow[h\to 0]{} 0 \iff \vec{P'P''} \neq o(h^{n+1})$$



مثال:

للقطع المكافئ تلامس من المرتبة الأولى مع المحور ox عند المبدأ.

- سنثبت فيما بعد أن البيان $y = x^3$ له تلامس من المرتبة الثانية مع المحور ox

- [التماس حالة خاصة من التلامس]

مبرهنة:

ليكن L_1, L_2 منحنيين نظاميين من الصف C_{n+1} ولتكن:

$s \longrightarrow \vec{r}_1(s)$ تمثيل طبيعي لـ L_1

$\sigma \longrightarrow \vec{r}_2(\sigma)$ تمثيل طبيعي لـ L_2

$$\vec{OP_0} = \vec{r}_1(s_0) = \vec{r}_2(\sigma_0)$$

يقال لـ L_1, L_2 تلامساً من المرتبة n عند p_0 إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}_1(s_0) = \vec{r}_2(\sigma_0) \\ \vec{r}_1^{\,\cdot}(s_0) = \vec{r}_2^{\,\cdot}(\sigma_0) \\ \vec{r}_1^{\,\cdot\cdot}(s_0) = \vec{r}_2^{\,\cdot\cdot}(\sigma_0) \\ \vdots \\ \vec{r}_1^{\,n}(s_0) = \vec{r}_2^{\,n}(\sigma_0) \end{array}\right\} \quad (*)$$

$$\vec{r}_1^{\,(n+1)}(s_0) \neq \vec{r}_2^{\,(n+1)}(\sigma_0)$$

الإثبات:

$(\Leftarrow)$:

بما أن $\vec{r}$ من الصف C_{n+1} فنستطيع أن نكتب نشر تايلور كما يلي:

$$\overrightarrow{op'} = \vec{r}_1(s_0+h) = \vec{r}_1(s_0) + h\dot{\vec{r}}_1(s_0) + \frac{h^2}{2!}\ddot{\vec{r}}_1(s_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}\vec{r}_1^{\,(n)}(s_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\vec{r}_1^{\,(n+1)}(s_0) + o(h)^{n+1}$$

$$\overrightarrow{op''} = \vec{r}_2(\sigma_0+h) = \vec{r}_2(\sigma_0) + h\dot{\vec{r}}_2(\sigma_0) + \frac{h^2}{2!}\ddot{\vec{r}}_2(\sigma_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}\vec{r}_2^{\,(n)}(\sigma_0) + \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!}\vec{r}_2^{\,(n+1)}(\sigma_0) + o(h)^{(n+1)}$$

$$\overrightarrow{p'p''} = \overrightarrow{op''} - \overrightarrow{op'} = \vec{r}_2(\sigma_0+h) - \vec{r}_1(s_0+h)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{p'p''} = \left(\vec{r}_2(\sigma_0) - \vec{r}_1(s_0)\right) + h\left(\dot{\vec{r}}_2(\sigma_0) - \dot{\vec{r}}_1(s_0)\right) + \cdots + \frac{h^n}{n!}\left(\vec{r}_2^{\,(n)}(\sigma_0) - \vec{r}_1^{\,(n)}(s_0)\right)$$
?
$$+ \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left(\vec{r}_2^{\,(n+1)}(\sigma_0) - \vec{r}_1^{\,(n+1)}(s_0)\right) + dh^{n+1}) \qquad (**)$$

سنفرض أن L_1, L_2 تلامسا من الرتبة n عند p_0 وسنثبت صحة العلاقات (*)

بما أن L_1, L_2 تلامس من الرتبة n عند p_0 فلهما تلامس من الرتبة k عند p_0 حيث $k \leq n$ لأن:

$$\frac{\overrightarrow{p'p''}}{h^k} = h^n \frac{\overrightarrow{p'p''}}{h^n \cdot h^k} = \underbrace{h^{n-k}}_{n-k>0} \underbrace{\frac{\overrightarrow{p'p''}}{h^n}}_{\to 0} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$$\Rightarrow \text{①}\ \overrightarrow{p'p''} = o(h^k) \qquad \text{حيث } 0 \leq k \leq n$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{p'p''} = o(1) = o(h) = o(h^2) = \cdots = o(h^n)$$

$\overrightarrow{p'p''}$ لا متناهي في الصغر من الرتبة n

من (**)

$$\overrightarrow{p'p''} \xrightarrow[h \to 0]{} \vec{r}_2(\sigma_0) - \vec{r}_1(s_0)$$

لكن $\overrightarrow{p'p''} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ حسب (1) $(\overrightarrow{p'p''} = o(1))$

وبما أن النهاية وحيدة فإن $\vec{r}_2(\sigma_0) - \vec{r}_1(s_0) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}_2(\sigma_0) = \vec{r}_1(s_0)}$$

$$\frac{\overrightarrow{P'P''}}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \vec{r}_2^{\,\cdot}(\sigma_0) - \vec{r}_1^{\,\cdot}(s_0)$$

حب (1) عندما $k=1$

$$\frac{P'P''}{h} \longrightarrow 0 \Rightarrow \boxed{\vec{r}_2^{\,\cdot}(\sigma_0) = \vec{r}_1^{\,\cdot}(s_0)}$$

وهكذا يتم البرهان حتى نصل إلى: $\vec{r}_2^{\,(n)}(\sigma_0) = \vec{r}_1^{\,(n)}(s_0)$

وبذلك يتم اثبات *

وعندئذ يصبح (**) من الشكل:

$$\overrightarrow{P'P''} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left(\vec{r}_2^{\,(n+1)}(\sigma_0) - \vec{r}_1^{\,(n+1)}(s_0)\right) + o\left(h^{n+1}\right)$$

نستنتج:

$$\vec{r}_1^{\,(n+1)}(s_0) \neq \vec{r}_2^{\,(n+1)}(\sigma_0)$$

من الفرض: للمنحنيين L_1 , L_2 تلامس من المرتبة n:

$$\Rightarrow \overrightarrow{P'P''} \neq o\left(h^{n+1}\right) \Rightarrow \frac{\overrightarrow{P'P''}}{h^{n+1}} \not\longrightarrow 0$$

نقسم طرفي (**) الأخيرة على h^{n+1}

$$\underbrace{\frac{\overrightarrow{P'P''}}{h^{n+1}}}_{\not\to 0,\ h\to 0} = \frac{1}{(n+1)!}\left(\vec{r}_2^{\,(n+1)}(\sigma_0) - \vec{r}_1^{\,(n+1)}(s_0)\right) + \underbrace{\frac{o\left(h^{n+1}\right)}{h^{n+1}}}_{\to 0,\ h\to 0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!}\left(\vec{r}_2^{\,(n+1)}(\sigma_0) - \vec{r}_1^{\,(n+1)}(s_0)\right) \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{r}_2^{\,(n+1)}(\sigma_0) \neq \vec{r}_1^{\,(n+1)}(s_0)$$

تم المطلوب

يتم إثبات الاتجاه الآخر بالمحاضرة القادمة.