المحاضرة الرابعة عشر:

تعريف: ليكن: $f: G \longrightarrow G'$ تشاكل زمري هومومورفيزم (Homomorphism) عندئذ:

1) إذا كان: f متباين نسمي f مونومورفيزم: (Monomorphism)

2) إذا كان: f غامر نسمي f إيبومورفيزم: (Epomorphism)

3) إذا كان: $G = G'$ نسمي f: إندومورفيزم: (Endomorphism)

4) إذا كان: f تقابل نسمي f: إيزومورفيزم: (Isomorphism)

5) إذا كان: f تقابل وكان $G = G'$ نسمي: f أوتومورفيزم (Automorphism)

أمثلة: التطبيق: $f: G \longrightarrow G'$ المعرف بالشكل:

$$\forall x \in G : f(x) = e'$$

هو تشاكل زمري وأيضاً التطبيق المطابق: $I_G : G \to G$ الذي يربط كل عنصر بنفسه وفق العلاقة: $x \longmapsto I_G(x) = x$ هو أيضاً تشاكل زمري.

ملاحظة: لتكن G ، G' زمرتين نرمز لمجموعة كل التشاكلات التي منطلقها G ومستقرها G' بالشكل: $Hom(G, G')$ وهي غير خالية لأ يوجد على الأقل التطبيق الذي يربط كل عنصر من G بمحايد G'))

وظيفة:

- أثبت أنّ تركيب تشاكلين زمريين هو تشاكل زمري.
- أثبت أنّ تركيب تشاكلين زمريين متباينين هو تشاكل زمري متباين.
- أثبت أنّ تركيب تشاكلين زمريين غامر هو تشاكل زمري غامر.
- أثبت أنّ تركيب تشاكلين زمريين تقابل هو تشاكل زمري تقابل.

تعريف: لتكن G' ، G زمرتين نقول عن G' ، G إنهما متماثلتان إذا وُجد بينهما تشاكل تقابل (إيزومورفيزم) ونعبر عن ذلك: $G \cong G'$

برهنة: كل زمرة جزئية ناظمية في زمرة ما هي نواة لتشاكل زمري غامر

الإثبات:

• لتكن: G زمرة ولتكن: H زمرة جزئية ناظمية في G

• ولنأخذ زمرة الخارج: G/H «وهي موجودة لأن H ناظمية في G فرضاً»، لنعرف العلاقة:

$$f : G \longrightarrow G/H$$

بالشكل: $\forall g \in G : f(g) = g.H$

• إن: f تطبيق لأن:

$$\forall g_1, g_2 \in G ; g_1 = g_2$$
$$: g_1.H = g_2 H$$
$$f(g_1) = f(g_2)$$

• إن: f تشاكل لأن:

$$f(g_1.g_2) = (g_1.g_2).H$$
$$= (g_1.H).(g_2.H)$$
$$= f(g_1).f(g_2)$$

• إن f غامر لأن: ليكن: $x \in G/H$ عندئذ: $x = g_0.H ; g_0 \in G$

$$f(g_0) = g_0.H = x$$

• إذن: f تشاكل زمري غامر.

• لنثبت أن: $\{H = \mathrm{Ker}(f)\}$

• ليكن: $g \in \mathrm{Ker}(f)$ عندئذ: $g \in G$ و: $f(g) = H$

$$\Rightarrow g.H = H \Rightarrow g \in H$$

ومنه: $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \subseteq H}$

لیکن: $h \in H$ عندئذ: $h.H = H$

$\Rightarrow f(h) = H \Rightarrow h \in \ker(f)$

ومنه: $\{\boxed{H \subseteq \ker(f)}\}$

ومن الاحتوائين: $\{H = \ker(f)\}$

تعريف: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G عندئذ:
نسمي التشاكل: $\pi : G \longrightarrow G/H$.
$\forall g \in G : \pi(g) = g.H$
بالتشاكل القانوني الغامر.

مبرهنات التماثل:

. مبرهنة التماثل الأولى:

لیکن: $f : G \longrightarrow G'$ تشاكل زمري عندئذ:

1). $G/\ker(f) \cong \operatorname{Im}(f)$

2). إذا كان: f غامر عندئذ: $G/\ker(f) \cong G'$

الإثبات: 1).

. لنفرض العلاقة: $g : G/\ker(f) \longrightarrow \operatorname{Im}(f) = f(G)$ بالشكل:

$\forall x.\ker(f) \in G/\ker(f) : g(x.\ker(f)) = f(x)$

. لنثبت أن: g تطبيق:

. ليكن: $x_1.\ker(f), x_2.\ker(f) \in G/\ker(f)$

. لنفرض أن: $x_1.\ker(f) = x_2.\ker(f)$

$\Rightarrow (x_1.\ker(f)).(x_2.\ker(f))^{-1} = \ker(f)$

حيث أن: $\ker(f)$ محايد المنطلق

$\Rightarrow (x_1.\ker(f)).(x_2^{-1}.\ker(f)) = \ker(f)$

$\Rightarrow (x_1.x_2^{-1}).\ker(f) = \ker(f)$

$\Rightarrow x_1.x_2^{-1} \in \ker(f)$

$$\Rightarrow f(x_1 . x_2^{-1}) = e'$$

$$\Rightarrow f(x_1) . f(x_2^{-1}) = e'$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$\Rightarrow$ g تطبيق .

• لنثبت أنّ g تشاكل:

$$g[(x_1 . \ker(f)).(x_2 . \ker(f))] = g[(x_1 . x_2)\ker(f)]$$
$$= f(x_1 . x_2)$$
$$= f(x_1) . f(x_2)$$
$$= g(x_1 . \ker(f)) . g(x_2 . \ker(f))$$

وبالتالي g تشاكل .

• لنثبت أنّ g متباين: لنفرض أنّ: $g(x_1 . \ker(f)) = g(x_2 . \ker(f))$

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$f(x_1) . f(x_2^{-1}) = e'$$
$$f(x_1 . x_2^{-1}) = e'$$
$$x_1 . x_2^{-1} \in \ker(f)$$
$$(x_1 . x_2^{-1}) \ker(f) = \ker(f)$$
$$(x_1 . \ker(f)).(x_2 . \ker(f))^{-1} = \ker(f)$$
$$x_1 . \ker(f) = x_2 . \ker(f)$$

$\Rightarrow$ g متباين

• لنثبت أنّ: g غامر:

ليكن: $z \in Im(f)$ عندئذٍ: يوجد $x_0 \in G$ بحيث: $z = f(x_0)$

لنأخذ المرافقة الناتجة عن x_0 ، $x_0 . \ker(f) \in G/\ker(f)$

$$\Rightarrow g(x_0 . \ker(f)) = f'(x_0) = z$$

• ومما سبق يكون g تقابل.

$$\Rightarrow G/\ker(f) \cong Im(f)$$

2) بما أنّ : f غامر فإنّ : $f(G) = G'$ وحسب: (1) نجد:

$$G/\ker(f) \cong f(G) = G'$$

مبرهنة التماثل الثانية:

لتكن G زمرة ولتكن: H, K زمر جزئية في G عندئذٍ:

إذا كانت $K \subseteq H$ وكانت K ناظمية في G فإنّ:

$$\frac{H.K}{K} = \frac{K.H}{K} = \frac{\langle K \cup H \rangle}{K} \cong \frac{H}{H \cap K}$$

الإثبات:

. لنفرض أنّ: K ناظمية في G عندئذٍ: $H.K = K.H = \langle H \cup K \rangle$

. وبما أنّ: $K \subseteq H.K \subseteq G$ وبما أنّ: K ناظمية في G فإنّ:

K ناظمية في: $H.K$ «وذلك حسب تمهيدية سابقة»

. ومنه فإنّ زمرة الخارج $\frac{H.K}{K}$ موجودة.

. ولنعرف العلاقة: $f : H \longrightarrow \frac{H.K}{K}$

بالشكل: $\forall h \in H : f(h) = h.K$

«ولنثبت الآن أنّ العلاقة: f هي تشاكل زمري غامر وبكون حسب

مبرهنة التماثل الأولى: $\frac{H}{\boxed{\ker(f)}} \cong \frac{H.K}{K}$

ومن ثم نثبت أنّ $\boxed{\ker(f) = H \cap K}$ فيصبح: $\frac{H}{\boxed{H \cap K}} \cong \frac{H.K}{K}$

ويتم المطلوب.»

. العلاقة: f تطبيق لأنّ:

$$\forall h_1, h_2 \in H ; h_1 = h_2 \Rightarrow h_1.K = h_2.K$$
$$\Rightarrow f(h_1) = f(h_2)$$

f تشاكل زمري لأنّ:

$$f(h_1 \cdot h_2) = (h_1 \cdot h_2) \cdot K = (h_1 \cdot K) \cdot (h_2 \cdot K)$$
$$= f(h_1) \cdot f(h_2)$$

• التشاكل الزمري f غامر لأنّ:

ليكن: $Z \in \frac{H \cdot K}{K}$ عندئذٍ يوجد: $x \in H \cdot K$ بحيث: $Z = x \cdot K$

ومنه يوجد $h_0 \in H$, $K_0 \in K$ بحيث:

$$x = h_0 \cdot K_0$$

$$\Rightarrow Z = (h_0 \cdot K_0) \cdot K = (h_0 \cdot K) \cdot (K_0 \cdot K)$$
$$= (h_0 \cdot K) \cdot K$$ لأنّ «$K_0 \in K$»

$$\Rightarrow Z = h_0 \cdot K$$

$f(h) = h_0 \cdot K = Z \Rightarrow$. f غامر.

• وحسب مبرهنة التماثل الأولى يكون:

$$\left\{ \frac{H}{\boxed{\ker(f)}} \cong \frac{H \cdot K}{K} \right\}$$

• لنثبت الآن أنّ: $\boxed{\ker(f) = H \cap K}$

• ليكن: $x \in \ker(f)$ عندئذٍ: $x \in H$

K عنصر الحياد المتعلق ; $f(x) = K$

ومن جهة أخرى:

$$f(x) = x \cdot K$$

$$\Rightarrow x = x \cdot K \Rightarrow x \in K \subseteq H$$

ومنه: $x \in K \cap H$

$$\Rightarrow \boxed{\ker(f) \subseteq K \cap H}$$

. ليكن: $\underline{y \in H \cap K}$ ، $y \in H$

$$f(y) = y \cdot K \underset{\text{لأنّ: } y \in K}{=} K \Rightarrow \underline{y \in Ker(f)}$$

. ومنه: $\boxed{H \cap K \subseteq Ker(f)}$

. ومن الاحتوائين:

$$\boxed{Ker(f) = H \cap K}$$

. ومنه يكون:

$$\left[\frac{H}{\boxed{H \cap K}} \cong \frac{H \cdot K}{K} \right]$$

مبرهنة التماثل الثالثة:

. لتكن: G زمرة ، K ، H زمر جزئية ناظمية في G بحيث: $K \subseteq H$

عندئذٍ:

1) . K ناظمية في H.

2) . الزمرة الجزئية $\frac{H}{K}$ ناظمية في $\frac{G}{K}$.

3) . $\frac{G/K}{H/K} \cong G/H$

الإثبات:

1) . واضح.

2) . بما أنّ: K ، H زمر جزئية ناظمية في G فإنّ كلاً من:

G/K ، G/H زمر خارج.

. وأيضاً بما أنّ: K ناظمية في H فإنّ: H/K زمرة خارج.

. ولنعرف العلاقة:

$$f : G/K \longrightarrow G/H$$

بالشكل: $\forall g.K \in G/K : f(g.K) = g.H$

• إنّ f تطبيق لأنّه :

$$\forall g_1.K , g_2.K \in G/K \; ; \; g_1.K = g_2.K$$

فإنّ :

$$g_1 \in g_2.K = g_1.K$$

$$\Rightarrow \exists k_0 \in K \; ; \; g_1 = g_2.k_0$$

$$\Rightarrow g_2^{-1}.g_1 = k_0 \in K \subseteq H$$

وبالتالي :

$$\exists h \in H \; ; \; g_2^{-1}.g_1 = h$$

وبالتالي :

$$\left.\begin{array}{l} g_1 = g_2.h \in g_2.H \\ g_1 \in g_1.H \end{array}\right] \Rightarrow g_1.H = g_2.H$$

وبالتالي :

$$f(g_1.K) = f(g_2.K)$$

• وأيضاً إنّ : f تشاكل لأنّ :

$$f((g_1.K).(g_2.K)) = f((g_1.g_2).K) = (g_1.g_2).H$$
$$= (g_1.H).(g_2.H)$$
$$= f(g_1.K).f(g_2.K)$$

«والآن لنثبت أنّ : $Ker(f) = \frac{H}{K}$ فنعتبر أنّ $\frac{H}{K}$ ناظمية في $\frac{G}{K}$

وذلك لأنّه :

بما أنّ f تشاكل زمري فإنّ $ker(f)$ تكون زمرة جزئية ناظمية في G/K وذلك حسب مبرهنة سابقة لكن $ker(f) = \frac{H}{K}$

ومنه نجد أنّ : $\frac{H}{K}$ زمرة جزئية ناظمية في $\frac{G}{K}$ »

• لنبرهن على أنّ : $\left\{ Ker(f) = \frac{H}{K} \right\}$

. ليكن : $\bar{z} \in \ker(f)$ عندئذٍ :

$$\bar{z} = zK \; ; \; z \in G$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{z}) = f(zK) = zH \\ f(\bar{z}) = f(zK) = H \end{array}\right\} \Rightarrow zH = H$$

$$\Rightarrow z \in H$$

. ومنه : $\bar{z} = zK \in \frac{H}{K}$

. وبالتالي : $\boxed{\ker(f) \subseteq \frac{H}{K}}$

. ليكن : $\bar{y} \in \frac{H}{K}$ عندئذٍ :

$$\exists y \in H \; ; \; \bar{y} = y.K$$

لكن : $H \subseteq G$ أي : $y \in G$

وبالتالي : $\bar{y} = y.K \in \frac{G}{K}$

$$f(\bar{y}) = f(y.K) = y.H = H$$

. ومنه : $\bar{y} \in \ker(f)$

وبالتالي : $\boxed{\frac{H}{K} \subseteq \ker(f)}$

ومن الاحتوائين نجد أنّ :

$$\left\{\frac{H}{K} = \ker(f)\right\}$$

. لكن : $\ker(f)$ زمرة جزئية ناظمية في : G/K

«وذلك حسب مبرهنة سابقة»

فنجد أنّ : $\frac{H}{K}$ زمرة جزئية ناظمية في G/K .

3) حسب (2) بما أنّ العلاقة f تشاكل وحسب مبرهنة التماثل الأولى فإنّ :

$$\frac{G/K}{\ker(f)} \cong Im(f).$$

وحسب (2) أيضاً نجد أنّ : $\ker(f)=H/K$ ومنه :

$$\frac{G/K}{H/K} \cong Im(f)$$

. لنبرهن الآن أنّ f غامر :

ليكن : $a.H \in G/H$ عندئذٍ : $a \in G$ ومنه : $a.K \in G/K$

وبالتالي : $f(a.K)=a.H$

وبالتالي : f غامر.

. ومنه وحسب مبرهنة التماثل الأولى نجد أنّ :

$$\frac{G/K}{H/K} \cong G/K$$

انتهت المحاضرة