الإثبات - (غير مطلوب) -

بما أن $(x_i)_{i=1..n}$ قاعدة لـ M

فإن كل عنصر $m \in M$ يكتب بشكل وحيد

$$m=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

وبالتالي إذا أخذنا العلاقة

$$f : M \longrightarrow N$$

$$f\left(m=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$$

نجد بسهولة أن f تشاكل مودولي وحيد

يحقق $f(x_i)=y_i$

المحاضرة التاسعة عشر

وجود مودول حر يمتلك قاعدة S بحيث $card\, S = n$

$S=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$; $card\, S = n$

لتكن R حلقة ما ولنأخذ في المجموعة

$$\mathcal{M}=\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ ; \ \alpha_i \in R\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i$$

ولنعرف على $\mathcal{M}$ قانوني التشكيل

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i+\alpha'_i) x_i$$

$$\lambda\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda\alpha_i x_i \ ; \ \lambda \in R$$

نجد أن $\mathcal{M}$ مودول على الحلقة R

وتكون S قاعدة له.

يسمى هذا المودول المودول الحر المبتذل

تمرين: ~~ملاحظة~~

أثبت أن كل مودول منتهي التوليد على حلقة R يماثل مودول القسمة لمودول حر

الحل -

ليكن $M=\langle S\rangle$; $S=(x_i)_{i=1..n}$

ولتكن $\mathcal{M}$ مودول حر مبتذل يمتلك قاعدة $A=(v_i)_{i=1..n}$ حيث $(card\, A=n)$

لنأخذ العلاقة

$$f : \mathcal{M} \longrightarrow M$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

نجد أن f تشاكل مودولي غامر لأن:

إن f تطبيق: أيا كان

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \ , \ \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i v_i$$

بحيث

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i v_i$$

فإن $\alpha_i = \alpha'_i$ حسب تعريف المودول الحر المبتذل

وبالتالي $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i x_i$

برهان الغمر

كما أنه أيا كان $\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \in M$

فإنه يكون $\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \in \mathcal{M}$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$$

أي f غامر

كما أنه أيا كان $m=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \ , \ m'=\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i v_i$

$$f(\lambda m+m') = f\left(\lambda\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i v_i\right)$$
$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda\alpha_i+\alpha'_i) v_i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda\alpha_i+\alpha'_i) x_i$$
$$= \lambda\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i x_i$$
$$= \lambda f(m) + f(m')$$

إذن f تشاكل مودولي غامر ومن مبرهنة التشاكل الأول يكون $M \simeq \mathcal{M}/_{\ker f}$

(يمكن توظيف مضمون التمرين كمبرهنة)

تمرين:

ليكن M مودول على حلقة ما، n عدد صحيح موجب والمطلوب أثبت تكافؤ القضيتين

1) M منتهي التوليد بمجموعة S حيث $card\, S = n$

2) يوجد تشاكل مودولي غامر $f: R^n \to M$

الحل:

$(1 \Rightarrow 2)$

لنفرض أن $M = \langle S \rangle \,;\, S = (x_i)_{i=1,\dots,n}$

ولنأخذ العلاقة $f: R^n \longrightarrow M$

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

نجد أن

• f تطبيق لأنه أياً كان $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \dots, \beta_n)$

فإن $\alpha_i = \beta_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$$

أي

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f(\beta_1, \dots, \beta_n)$$

أي f تطبيق

• f غامر

كما أنه أياً كان $m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in M$

وبالتالي يوجد $\alpha_i \in R$ أي يوجد $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$ بحيث

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = m$$

أي f غامر

• تشاكل:

كما أنه أياً كان $(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \in R^n$

و $\lambda \in R$ فإن

$$f(\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n))$$
$$= f(\lambda\alpha_1 + \beta_1, \lambda\alpha_2 + \beta_2, \dots, \lambda\alpha_n + \beta_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda\alpha_i + \beta_i) x_i$$
$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$$
$$= \lambda f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + f(\beta_1, \dots, \beta_n)$$

أي أن f تشاكل مودولي

$(2) \Rightarrow (1)$

نفرض $f: R^n \longrightarrow M$ تشاكل مودولي غامر عندئذٍ أياً كان $m \in M$ فإنه يوجد $x \in R^n$ بحيث

$$m = f(x)$$

وبما أن R^n يملك قاعدة $B = (e_i)_{i=1,\dots,n}$

فإن $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

وبالتالي $m = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i)$$

وهذا يبين أن $M = vect(f(e_i))_{i=1,\dots,n}$

$$= \langle f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n) \rangle$$

تمرين :

ليكن M, N موديولين على حلقة R

N حرة قاعدتها $(y_i)_{i=1\ldots n}$ ؛ $f : M \longrightarrow N$ تشاكلاً غامراً

اثبت أن $M = M_1 \oplus M_2$ حيث M موديول حر

$\Updownarrow$

اثبت انه يوجد موديول حر جزئي من M يكون جمعاً مكملاً مباشراً فيه

الحل :

بما أن f غامر فإنه إذا كان $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \in N$

يوجد $m \in M$ بحيث $y = f(m)$ (1)

وبما أن f غامر فإنه من أجل $y_1, \ldots, y_n$

يوجد $x_1, \ldots, x_n \in M$ بحيث

$y_i = f(x_i)$. وبالتالي

$M_1 = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$

موديول جزئي من M ولنبرهن على أنه حر

. إن $(x_i)_{i=1\ldots n}$ مستقلة خطياً لأن إذا كان

$\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = 0$

فإن

$f\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\right) = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \beta_i f(x_i) = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i = 0 \xRightarrow{y_i \text{ حرة}} \beta_i = 0 \quad \forall i = 1 \ldots n$

. ولنثبت أن $M = M_1 \oplus \operatorname{Ker} f$

$$\begin{cases} M = M_1 + \operatorname{Ker} f \\ M_1 \cap \operatorname{Ker} f = 0 \end{cases}$$

إذا كان $m \in M$ فإن $f(m) \in N$

$(y_i)_{i=1\ldots n} \xRightarrow{N \text{ حرة قاعدتها}} f(m) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$

$\Rightarrow f(m) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$

$f(m) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)$

$\underbrace{\left(m - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)}_{\in M_1} \in \operatorname{Ker} f$

$m = m_1 + a ; \quad m_1 \in M_1 , \quad a \in \operatorname{Ker} f$

أي أن $M = M_1 + \operatorname{Ker} f$

. $\forall x \in M_1 \cap \operatorname{Ker} f$

فإن $x \in M_1$ and $x \in \operatorname{Ker} f$

$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ and $f(x) = 0$

$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$

$(y_i \text{ حرة})$

$\Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1 \ldots n$

$\Rightarrow x = 0$

أي $M_1 \cap \operatorname{Ker} f = 0$