الموضوع: المحاضرة ١٩ — التاريخ: ٢/١٢/٢٠١٤

طريقة سيمبسون

بفرض $y=f(x)$ تابع معرف على المجال $[a,b]$

نقوم بتجزئة المجال $[a,b]$ إلى n مجال متساوي الطول
حيث طول كل مجال $h=\frac{b-a}{n}$ ، n زوجي

يكون: $[a,b]=[x_0,x_2]\cup[x_2,x_4]\cup\dots\cup[x_{n-2},x_n]$

لحساب التكامل $\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx$ نوجد حدودية الاستيفاء للتابع $f(x)$ ولتكن $P_2(x)$ عند النقاط x_0, x_1, x_2

$$P_2(x)=P_2(t)=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0$$

$$x=ht+x_0$$

ومنه:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \simeq \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\,dx$$

$$=\int_0^2 P_2(t)\,h\,dt$$ حسب تغيير المتحول

$$=h\int_0^2 \left(y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0\right)dt$$

$$=h\left[y_0 t+\Delta y_0\frac{t^2}{2}+\frac{\Delta^2 y_0}{2}\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right)\right]_0^2$$

$$=h\left[2y_0+2\Delta y_0+\frac{1}{3}\Delta^2 y_0\right]$$

$$= h\left[2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right]$$

$$= h\left[\frac{1}{3}y_0 + \frac{4}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right]$$

ومنه $I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_n} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$

$$\simeq \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right] + \frac{h}{3}\left[y_2 + 4y_3 + y_4\right] + \cdots$$

$$+ \cdots + \frac{h}{3}\left[y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right]$$

ومنه قانون التكامل التقريبي بطريقة سمبسون كما يلي:

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right]}$$

للحفظ

تمرين (1): باستخدام طريقة سمبسون أوجد قيمة تقريبية للتكامل $I = \int_0^{0.8} \frac{dx}{1+x^2}$ حيث $n = 8$

لدينا قيم عند $n = 8$

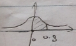
الحل: $n=8 \Rightarrow h=0.1$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	1	0.99	0.9615	0.9174	0.862	0.8	0.7352	0.6711	0.6097

تطبق قانون سمبسون نجد

$$I \simeq \int_0^{0.8} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + y_8 \right]$$

$$= \frac{0.1}{3}\left[1 + 4(0.99) + 2(0.9615) + 4(0.9174) + 2(0.862) + 4(0.8) + 2(0.7352) + 4(0.6711) + 0.6097 \right]$$



$$= 0.6747$$

نلاحظ أن القيمة المقابلة

$$I = \int_0^{0.8} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\operatorname{arctg} x \right]_0^{0.8} = 0.6747$$

تمرين (٢): باستخدام طريقة سمبسون أوجد القيمة التقريبية للتكامل

$$I = \int_1^2 \sqrt{1+x^2}\, dx$$

من أجل $n=4$

لإيجاد حسابه بطريقة سمبسون

الحل:
$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{4}=0.25$$

x	1	1.25	1.5	1.75	2
$f(x)$	1.4142	1.6007	1.8027	2.0155	2.236

$$I=\int_1^2 \sqrt{1+x^2}\,dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4\right]$$

$$\approx \frac{0.25}{3}\left[1.4142+(4)(1.6007)+(2)(1.8027)+(4)(2.0155)+2.236\right]$$

$$=1.81$$

تمرين (3): باستخدام طريقة سيمبسون أوجد قيمة تقريبية للتكامل

$$I=\int_{0.2}^{0.6} \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}\,dx$$

الحل: $n=4 \Rightarrow h=\frac{b-a}{n}=\frac{0.6-0.2}{4}$

$h=0.1$

x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(x)$	0.987	0.9716	0.9518	0.929	0.905

$$I=\int_{0.2}^{0.5} \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}\,dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4\right]$$

$$\approx \frac{0.1}{3}\left[0.987 + (4)(0.9716) + (2)(0.9518) + (4)(0.929) + 0.905\right]$$

$$\approx 0.3799$$

وظيفة:

$$I = \int_{-4}^{-1} \frac{\cos(x+15)}{e^{\sin x}}\, dx$$

$n = 6$

بطريقة المستطيلات وأشباه المنحرفات وطريقة سيمبسون