Subject التاريخ: (18)

Date 2014/11/26 الموضوع:

المحاضرة الثامنة عشر

التوابع العقدية

* تعريف التابع العقدي:

هو تابع منطلقه ومستقره مجموعة جزئية من $\mathbb{C}$.

بمعنى آخر: بفرض $f: A \longrightarrow B$ عندئذ $A,B \subset \mathbb{C}$ تابع عقدي

$z \longmapsto w=f(z)$

منطلقه A ومستقره B.

بفرض $z=x+iy$ عندئذ $w=f(z)=f(x+iy)$

$= u(x,y)+iv(x,y)$

حيث u,v توابع حقيقية بمتحولين x,y

نسمي $u=u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$ القسم الحقيقي للتابع f

$v=v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$ القسم التخيلي للتابع f

مثال:

$f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$

$z\longmapsto w=f(z)=z^2$

f تابع عقدي، بفرض $z=x+iy$ عندئذ $w=f(z)=z^2=(x+iy)^2$

$= x^2-y^2+i2xy$

$\Rightarrow \begin{cases} u=u(x,y)=\operatorname{Re} f(z) = x^2-y^2 \\ v=v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)=2xy\end{cases}$

نلاحظ أن u,v تابعان حقيقيان معرفان على كامل المستوي العقدي

تمرين: بفرض $w=f(z)=\frac{x}{y-1}+i\frac{1}{x^2+y^2-2y}$

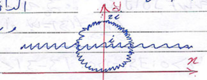
أوجد مجموعة تعريف التابع $f(z)$

الحل: نلاحظ أن $u(x,y)=\frac{x}{y-1}$ معرفة على كامل نقاط المستوي العقدي باستثناء النقاط التي تحقق $y=1$

$v(x,y)=\frac{1}{x^2+(y-1)^2-1}$ معرفة على كامل المستوي العقدي باستثناء الدائرة التي معادلتها $x^2+(y-1)^2=1$

ومنه مجموعة تعريف التابع هي

$\mathbb{C}-(\{y=1\}\cup\{x^2+(y-1)^2=1\})$



Subject ______ التاريخ :

Date ______ الموضوع :

ملاحظة: كل متتالية عقدية هي تابع عقدي مجاله طبيعي من الشكل

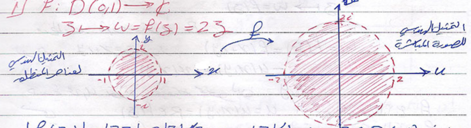
$z : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$

$n \longmapsto z_n$

تمرين: أوجد المستقر الفعلي للتوابع العقدية التالية:

1] $f : D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \longmapsto w = f(z) = 2z$

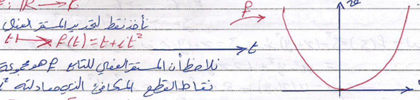


نفرض $z \in D(0,1)$ عندئذ $|z|<1$ ومنه $|f(z)| = |2z| = 2|z| < 2$

2] $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

نأخذ نقط لتحديد المستقر الفعلي

$t \longmapsto f(t) = t + it^2$

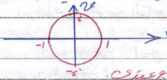


نلاحظ أن المستقر الفعلي للتابع f هو مجموعة نقاط القطع المكافئ الذي معادلته $v = u^2$

3] $f : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longmapsto f(t) = \text{Cis}\, t = \cos t + i \sin t$

نلاحظ أن المستقر الفعلي هو $C(0,1)$



نهاية تابع عقدي

نفرض $w = f(z)$ تابع عقدي معرف في جوار النقطة z_0 عندئذ نقول أن لـ f نهاية

عندما $z \to z_0$ ونكتب $w \xrightarrow[z \to z_0]{} w_0$ أو $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$

إذا تحقق الشرط التالي:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Subject ________ التاريخ :

Date ________ الموضوع :

ملاحظة: إن الجوار $0<|z-z_0|<\delta$ تمثل قرص مفتوح مركزه z_0 ونصف قطره δ وبالتالي اقتراب z من z_0 له عدد لانهائي من المسارات لا كما في حالة التوابع الحقيقية لها مسارين فقط من اليسار ومن اليمين.

مثال:

ليكن $y=f(x)=\frac{1}{x}$ تابع حقيقي

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$$

ومنه لا توجد نهاية للتابع $f(x)$ عندما $x\to 0$.

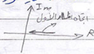
لكن دراسة التابع $w=f(z)=\frac{1}{z}$ يختلف تماماً.

ليكن $w=f(z)=\frac{z^2}{|z|^2}$ تابع عقدي أثبت أن $\lim_{z\to 0} f(z)$ غير موجودة

الحل: لنأخذ النهاية على طريقين مختلفين

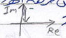
المسار الأول عن طريق المحور الحقيقي $y=0$

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{|z|^2}=\lim_{x+iy\to 0}\frac{x^2-y^2+2xyi}{x^2+y^2}=\cancel{\lim\frac{x^2}{x^2}}$$



$$=\lim_{x+iy\to 0}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x+iy\to 0} 1 = 1$$

المسار الثاني عن طريق المحور التخيلي $x=0$



$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{|z|^2}=\lim_{x+iy\to 0}\frac{(x^2-y^2)+2xyi}{x^2+y^2}=\lim\frac{-y^2}{y^2}$$

$$=\lim_{x+iy\to 0} -1 = -1$$

ومنه النهاية غير موجودة.

مبرهنة: ليكن $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تابع عقدي معرف في جوار النقطة $z_0=x_0+iy_0$ ولنفرض $w_0=u_0+iv_0$ عندئذ:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0 \iff \begin{cases}\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0\end{cases}$$

الإثبات ($\Rightarrow$) بما أن $\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$ فإنه

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta(\varepsilon)>0: |z-z_0|<\delta \to |w-w_0|<\varepsilon$$

ومنه
$$|u-u_0| = |Re(w-w_0)| \le |w-w_0|$$
$$|v-v_0| = |Im(w-w_0)| \le |w-w_0|$$
#

($\Leftarrow$) بما أن $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0$ فإنه

$$\forall \varepsilon>0: \exists \delta(\varepsilon)>0: |(x,y)-(x_0,y_0)|<\delta_1 \Rightarrow |u-u_0|<\frac{\varepsilon}{2}$$

وبما أن $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0$ فإنه

$$\forall \varepsilon>0: \exists \delta(\varepsilon)>0: |(x,y)-(x_0,y_0)|<\delta_2 \to |v-v_0|<\frac{\varepsilon}{2}$$

نضع $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ لتحقق الشرط الأول والثاني

$$|z-z_0|<\delta \Rightarrow |w-w_0| = |(u+iv)-(u_0+iv_0)| \le |u-u_0|+|v-v_0| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

تمرين: نفرض $w=f(z)=\frac{x}{x^2+y^2}+i\,\frac{2x^2-y}{y^2+1}$

أوجد $\lim_{z\to(1+i)} f(z)$

$$\lim_{z\to 1+i} f(z) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x}{x^2+y^2} + i \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x^2-y}{y^2+1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$
#

مبرهنة: نفرض $f_1(z)$ ، $f_2(z)$ تابعان عقديان و α ثابت عقدي عندئذ:

1) $\lim_{z\to z_0} (\alpha f_1+f_2)(z) = \alpha \lim_{z\to z_0} f_1(z) + \lim_{z\to z_0} f_2(z)$

2) $\lim_{z\to z_0} (f_1\cdot f_2)(z) = \lim_{z\to z_0} f_1(z) + \lim_{z\to z_0} f_2(z)$

3) $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |\lim_{z\to z_0} f(z)|$

وظيفة: نفرض $w=f(z)=\frac{\bar{z}+i}{|z-1-i|}$ أوجد مجموعة تعريف التابع $f(z)$ ومسقطه التخيلي والحقيقي ثم أثبت أن النهاية $\lim_{z\to 1+i} f(z)$ غير موجودة وأوجد $\lim_{z\to 0} f(z)$

انتهت المحاضرة

مجموعة تعريف التابع هي $\mathbb{C} - \{1+i\}$

$$f(z) = \frac{\bar{z} + i}{|z - i - 1|}$$

$$\lim_{z \to 0} f(z) = f(0) = \frac{i}{|-1-i|} = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$f(z) = \frac{x - iy + i}{|x + iy - i - 1|} = \frac{x + i(1-y)}{|(x-1) + i(y-1)|} = \frac{x + i(1-y)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}$$

$$\lim_{z \to (1,1)} f(z) = \lim_{z \to (1,1)} \frac{x + i(1-y)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}$$

للبحث بوجود نهاية نأخذ النهاية عن طريق مسارين

نبحث عن وجود نهاية للقسم التخيلي لـ $f(z)$
حيث أن قسمه التخيلي هو

$$\frac{(1-y)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}$$

لنأخذ المسار الأول هو $y=1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{0}{\sqrt{(x-1)^2}} = 0$$

Subject ________ التاريخ: ________

Date ________ الموضوع: ________

لنأخذ المسار الثاني هو $x=y$ ومن الطرف الأعلى

$$\lim_{y\to 1}\frac{1-y}{\sqrt{(y-1)^2+(y-1)^2}}=\lim_{y\to 1}\frac{1-y}{\sqrt{2}\,|y-1|}=\lim_{y\to 1}\frac{-(y-1)}{\sqrt{2}\,(y-1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ولوجود نهايتين مختلفتين للقسم التخيلي ينتج أن $\lim_{z\to(1,1)} f(z)$ غير موجودة.

إن القسم الحقيقي للتابع $f(z)$ هو

$$u=\frac{x}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$$

أما القسم التخيلي له فهو

$$v=\frac{(1-y)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$$