$(K\circ h)\circ f = f \quad (3)$

وبما أن التطبيق المطابق هو الوحيد الذي يجعل المخطط تبادلي أي $I\circ f = f \ (4)$

$K\circ h = I$ فإن ③ and ④ and (I وحيد)

وينتج من ذلك أن h متباين

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & F \\ F \arrow[ur, "I"'] & \end{tikzcd}$$

من (1) و (2) نجد

$h\circ(K\circ \bar f) = \bar f$

$(h\circ K)\circ \bar f = \bar f$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\bar f"] \arrow[d, "\bar f"'] & \bar F \\ \bar F \arrow[ur, "I \text{ وحيد}"'] & \end{tikzcd}$$

م $(\bar F, \bar f)$

$h\circ K = I$

ينتج من ذلك أن h غامر

$2 \Rightarrow 1$

أياً كان M مودولاً ما تطبيق $g: S\to M$

ولنبرهن على وجود تشاكل مودولي وحيد $V:\bar F\to M$ يحقق $V\circ\bar f = g$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, "\bar f"'] & M \\ \bar F \arrow[r, "h^{-1}"'] & F \arrow[u, "K"'] \end{tikzcd}$$

وبما أن $h: F\to\bar F$ تشاكل يحقق $h\circ f = \bar f$

فإن $h^{-1}: \bar F\to F$ تشاكل وحيد يحقق

$f = h^{-1}\circ\bar f$

وبما أن (F, f) حر على S فإنه يوجد $K: F\to M$

تشاكل مودولي وحيد

يحقق $K\circ f = g$

وبالتالي $V = K\circ h^{-1}: \bar F\to M$ تشاكل مودولي وحيد ويكون

$V\circ\bar f = (K\circ h^{-1})\circ\bar f$

$= K\circ(h^{-1}\circ\bar f)$

$= K\circ f = g$

إذن $(\bar F, \bar f)$ مودول حر على S

المحاضرة الثامنة عشر

بناء مودول حر على مجموعة غير خالية

لتكن R حلقة، $S\neq\emptyset$ مجموعة غير خالية

ولنأخذ مجموعة التطبيقات

$R^S = \{V: S\to R : V(s)=0 \ \forall s\in S\}$

باستثناء عدد منته

ولنعرف على R^S قانوني التشكيل

داخلي ⊕ $(V+U)(s) = V(s)+U(s)$

خارجي ⊙ $(\alpha.V)(s) = \alpha V(s)$

وذلك أياً كان $\alpha\in R$, $U,V\in R^S$

نجد أن R^S مودول على الحلقة R

ولنأخذ التطبيق $f: S\to R^S$

$s\mapsto f_s$

بحيث $f_s: S\to R$

$$f_s(t) = \begin{cases} 1 : & t=s \\ 0 : & t\neq s \end{cases}$$

فيكون (R^S, f) مودول حر على S

لأنه من أجل أي مودول M على R وأي

تطبيق $g: S\to M$

يوجد تشاكل مودولي وحيد $h : R^{s} \to M$
بحيث $h \circ f = g$

اطلاع

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & M \\ R^{s} \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

المودول الحر:

تعريف:

لتكن S مجموعة جزئية من مودول M على R.
نقول عن S أنها مولدة للمودول M ونكتب
$M = \langle S \rangle$ أو $M =$

إذا كان كل عنصر $m \in M$ يكتب كتركيب خطي لمجموعة منتهية من عناصر S أي:

$$M = \langle S \rangle \Leftrightarrow \forall m \in M : m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

حيث $x_i \in S \ , \ \alpha_i \in R$

نقول عن S إنها مستقلة خطياً على R (أو حرة على R)
إذا تحقق من أجل كل مجموعة منتهية $(x_i)_{i=1..n}$ يتحقق الاقتضاء

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, 2 .. n$$

سؤال:

$V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$

من أجل $\alpha \in \mathbb{R}$ التوابع

$$f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |x - \alpha|$$

فتكون $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ جماعة عناصر من الفضاء V، المطلوب هل الجماعة $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ مستقلة خطياً

- نقول عن S إنها قاعدة لـ M إذا كان $M = \langle S \rangle$ and (S حرة على R)

مبرهنة:

إذا كان M مودولاً على حلقة R وكانت S مجموعة غير خالية من M عندئذٍ إن القضيتين التاليتين متكافئتان.

(1) S قاعدة لـ M

(2) كل عنصر من M يكتب كتركيب خطي (منتهي) لعناصر S بشكل وحيد.

الإثبات:

$(1) \Rightarrow (2)$

حسب الفرض $M = \langle S \rangle$

وبالتالي كل عنصر $m \in M$ يكتب كتركيب خطي

$$m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

ونفرض

$$m = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i x_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha'_i) x_i = 0$$

$$\xrightarrow{S \text{ حرة}} \alpha_i - \alpha'_i = 0 \quad \forall i = 1 .. n$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \alpha'_i \quad \forall i = 1 .. n$$

$(2) \Rightarrow (1)$

حسب الفرض يكون $M = \langle S \rangle$ ولنبرهن على أن S حرة على R

لتكن $(x_i)_{i=1..n}$ مجموعة عناصر من S ولنأخذ

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

وبالتالي يكون

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 = \sum_{i=1}^{n} 0 x_i \xRightarrow{(2)} \alpha_i = 0 \ \forall i=1..n$$

إذن S حرة وبالتالي S قاعدة لـ M

ملاحظة:

إن بعض المفاهيم حول الإستقلال الخطي في الفضاء الشعاعي تكون صحيحة في المودولات ولكن بعضها لا يبقى صحيحا، مثلا في الفضاءات الشعاعية كل جملة مؤلفة من شعاع وحيد غير صفري هي جملة حرة، هذه القضية غير صحيحة في المودولات

مثال:

$M = \langle a \rangle_n$ (الزمرة الدوارة على Z)

فإن الجملة $\{a\}$ ليست حرة في M لأن

$na = 0 ; n \neq 0$ ($\{a\}$ ليست قاعدة لـ M)

توضيح:

• $\langle a \rangle_7 : 7a = 0 ; 7 \neq 0$

• وفي المودول $M \langle a \rangle_\infty$ (a رتبة غير منتهية)

فإن الجملة $\{a\}$ تكون حرة

$\alpha a = 0 ; \alpha \in Z$ يحقق فقط عندما $\alpha = 0$

($\{a\}$ قاعدة المودول $M = \langle a \rangle_\infty$)

مثال:

R حلقة ما n عدد صحيح موجب،

R^n مودول يملك قاعدة

$S = \{e_1 = (1,0,...,0), e_2 = (0,1,0...0), ..., e_n = (0,0,...,0,1)\}$

تعريف

ليكن M مودولا ما على حلقة R

نقول عن M إنه حر إذا كان $M \cong F$

حيث (F, f) حر على مجموعة $S \neq \emptyset$

. كل مودول حر على مجموعة S (F,f)

تكون Imf قاعدة لـ F

M حر $\Leftrightarrow$ $M \cong F$ حيث (F,f) حر على S

$\Leftrightarrow$ $M \cong F$ و F يمتلك قاعدة

$\Leftrightarrow$ M يمتلك قاعدة

أمثلة:

• المودول R^n حر لأنه يمتلك قاعدة $\{e_1, ..., e_n\}$

• المودول $M = \langle a \rangle_n$ (على Z) ليس حرا

• $M = \langle a \rangle_\infty$ (على Z) حر قاعدته $S = \{a\}$

مبرهنة:

إذا كان M, N مودولين على حلقة R

وكان M حرا قاعدته $(x_i)_{i=1..n}$

وكانت $(y_i)_{i=1..n}$ جملة عناصر في N

فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد

$$f: M \to N$$

يحقق $f(x_i) = y_i \quad \forall i=1..n$

توضيح

$x_1, ..., x_n$ $y_1, ..., y_n$

M حر   N

الإثبات : (غير مطلوب) :

بما أن $(x_i)_{i=1..n}$ قاعدة لـ M

فإن كل عنصر $m \in M$ يكتب بشكل وحيد

$$m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

بالتالي إذا أخذنا العلاقة :

$$f : M \longrightarrow N$$

$$f\left(m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$$

نجد بسهولة أن f تشاكل مودولي وحيد

يحقق $f(x_i) = y_i$