

$K \circ f = g$ تحقق

وبالتالي $M \rightarrow \bar{F} : V = K \circ h^{-1}$ شكل
موردولي ووحيد ويكون

$$\begin{aligned} V \circ f &= (K \circ h) \circ f \\ &= K \circ (h \circ f) \\ &= K \circ g = g \end{aligned}$$

اذن (\bar{F}, f) موردولي حرج على S .

المحاضرة الثامنة عشر

بناء موردولي حرج على مجموعة غير خالية
لتكن R حلقة ، $S \neq \emptyset$ مجموعة غير خالية
لنأخذ مجموعة التطبيقات

$$R^S = \{v: S \rightarrow R : v(s) = 0 \forall s \in S\}$$

بإستاء عدده

ولنعرف على R^S قانوني التكميل

\oplus دافعي $(v+u)(s) = v(s) + u(s)$

\odot خارجي $(\alpha \cdot v)(s) = \alpha v(s)$

وذلك انما كان $u, v \in R^S$ ، $\alpha \in R$

نتيجة ان R^S موردولي على الحلقة R

لنأخذ التطبيق $f: S \rightarrow R^S$

$s \mapsto f_s$

$f_s: S \rightarrow R$ بحيث

$$f_s(t) = \begin{cases} t & t = s \\ 0 & t \neq s \end{cases}$$

فيكون (R^S, f) موردولي حرج على S

لأنه من أجل أي موردول M على R وأي

تطبيق $g: S \rightarrow M$

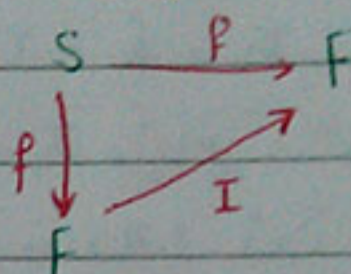
$(K \circ h) \circ f = g$ (3)

وبما ان التطبيق المطابق هو الوحيد الذي

يجعل المخطط تبادلي اي $I \circ f = g$ (4)

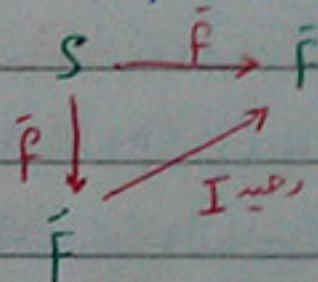
(I وحيد) and (4) and (3) بان $K \circ h = I$

وننتج من ذلك ان h متباين



من (1) و (2) $h \circ (K \circ f) = f$

$(h \circ K) \circ f = f$



(\bar{F}, f) حرج

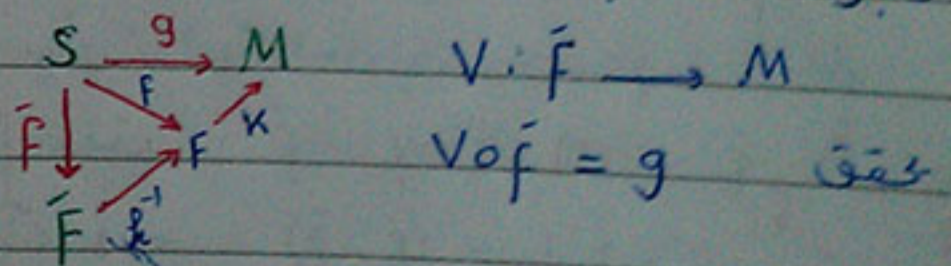
$h \circ K = I$

وننتج من ذلك ان h عامر

$2 \Rightarrow 1$

أيما كان M موردولا ما $g: S \rightarrow M$ تطبيق

ولنبرهن على وجود شكل موردولي وحيد



$V \circ f = g$ تحقق

وبما ان $h: f \rightarrow \bar{f}$ متباين تحقق $h \circ f = \bar{f}$

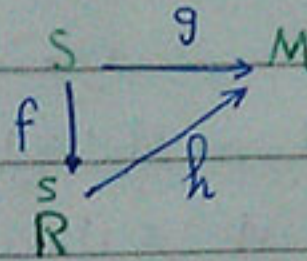
فان $\bar{f}: \bar{F} \rightarrow F$ شكل وحيد تحقق

$f = \bar{h} \circ \bar{f}$

وبما ان (F, f) حرج على S فإنه يوجد

شكل موردولي وحيد $K: F \rightarrow M$

يوجد تماثل مودولي وحيد $h: R \rightarrow M$ حيث $hof = g$.
 نقول عن S إنها قاعدة لـ M إذا كان $M = \langle S \rangle$ and (حرّة على R)



إطلاع

مبرهنة ..

إذا كان M مودولاً على حلقة R وكانت S مجموعة غير خالية من M عندئذٍ إن القضيّتين التاليتين متكافئتان .

المودول الحر :

تعريف ..

(1) S قاعدة لـ M (2) كل عنصر من M يكتب كتركيب خطي (منتهى) لعناصر S بـ \wedge كل وحيد .

الإثبات ..

(2) \Rightarrow (1)

حسب الفرض $M = \langle S \rangle$

وبالتالي كل عنصر $m \in M$ يكتب كتركيب خطي

$$m = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

وبعض $m = \sum_{i=1}^n \alpha'_i x_i$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^n \alpha'_i x_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha'_i) x_i = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_i - \alpha'_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \alpha'_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

(1) \Rightarrow (2)

حسب الفرض يكون $M = \langle S \rangle$ ولنبرهن على

أن S حرّة على R

لتكن S مجموعة جزئية من مودول M على R .
 نقول عن S أنها مولدة للمودول M وتكتب $M = \langle S \rangle$ أو $M =$

إذا كان كل عنصر $m \in M$ يكتب كتركيب خطي لمجموعة منتهية من عناصر S أي:

$$M = \langle S \rangle \Leftrightarrow \forall m \in M : m = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

حيث $x_i \in S$, $\alpha_i \in R$

نقول عن S أنها مستقلة خطياً على R (أو حرّة على R)

إذا تحقق من أجل كل مجموعة منتهية $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ يتحقق الاقتضاء

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

سؤال ..

$$V = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \}$$

من أجل $\alpha \in \mathbb{R}$ التابع

$$f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \alpha x$$

فتكون $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ جماعة عناصر من V ، لنفرض

V المطلوب هل الجماعة $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ مستقلة

خطياً

$S = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)\}$

لتكن (x_i) مجموعة عناصر من S ولناخذ

$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$

وبالتالي يكون

$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0 = \sum_{i=1}^n 0 x_i \xrightarrow{(2)} \alpha_i = 0 \forall i = 1, \dots, n$

تعريف

ليكن M مودولاً ما على حلقة R
 نقول عن M إنه $M \cong F$ إذا كان $M \cong F$
 حيث (F, f) R على مجموعة $S \neq \emptyset$
 كل مودول M على مجموعة S (F, f)
 تكون Imp قاعدة لـ F

إذ S قاعدة R بالتالي S قاعدة لـ M
ملاحظة

$M \cong F \iff M \cong F$ حيث (F, f) R على S
 $M \cong F \iff F$ يمتلك قاعدة
 M يمتلك قاعدة

إن بعض المفاهيم حول الاستقلال الخطي في الفضاء الشعاعي تكون مريحة في المودولات ولكن بعضها لا يبقى صحيحاً، مثلاً في الفضاء الشعاعي كل عملية كل عملية مؤلفة من شعاع وحيد غير صفري هي جملة حرة، هذه القضية غير صحيحة في المودولات

أمثلة

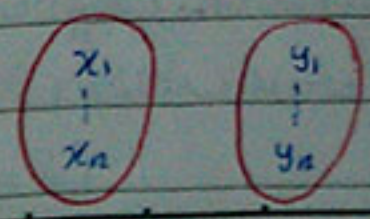
- المودول R^n R لأنه يمتلك قاعدة (e_1, \dots, e_n) .
- المودول $M = \langle a \rangle_n$ (\mathbb{Z} على \mathbb{Z}) ليس حراً
- $M = \langle a \rangle_\infty$ (\mathbb{Z} على \mathbb{Z}) R قاعدة $S = \{a\}$

$M = \langle a \rangle_n$ (الزمرة الدائرية على \mathbb{Z})
 فإن الجملة $\{a\}$ ليست حرة في M لأن
 $na = 0; n \neq 0$ ($\{a\}$ ليست قاعدة لـ M)

مبرهنة

إذا كان M, N مودولين على حلقة R
 وكان M حراً قاعدته (x_i)
 وكانت (y_i) جملة عناصر في N
 فإنه يوجد f لكل مودول R وحيد
 $f: M \rightarrow N$
 يحقق $f(x_i) = y_i \forall i = 1, \dots, n$

توضيح
 $\langle a \rangle_n: \tau a = 0; \tau \neq 0$
 وفي المودول $M = \langle a \rangle_\infty$ (a مرتبة غير منتهية)
 فإن الجملة $\{a\}$ تكون حرة
 $\alpha a = 0; \alpha \in \mathbb{Z}$ يحقق فقط عندما $\alpha = 0$
 ($\{a\}$ قاعدة المودول $M = \langle a \rangle_\infty$)



توضيح

مثال
 R حلقة ما n عدد صحيح موجب
 R^n مودول R يمتلك قاعدة

الإثبات (غير مباشر)

بما أن $(x_i)_{i=1}^n$ قاعدة لـ M

فإن كل عنصر $m \in M$ يكتب بشكل وحيد

$$m = \sum_{i=1}^n d_i x_i$$

والتالي إذا أخذنا العلاقة

$$f: M \rightarrow N$$

$$f\left(m = \sum_{i=1}^n d_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n d_i y_i$$

من سهولة أن f ساكن مودولي وطبيعي

$$f(x_i) = y_i \quad \text{لحقة}$$