الأربعاء: 10/12/2014

## المحاضرة التاسعة عشرة

### التحليل المحدب:

ليكن لدينا الفضاء المتجهي $\mathbb{R}^n$ ولتكن $x, y \in \mathbb{R}^n$ عندئذٍ:

نعرف المستقيم المار بالنقطتين $x, y$ كما يلي:

$$L = \{z \; ; \; z = \alpha x + (1-\alpha) y \; ; \; \alpha \in \mathbb{R}\}$$

ونعرف القطعة المستقيمة المغلقة بين نقطتين كما يلي:

$$\bar{M} = \{z \; ; \; z = \alpha x + (1-\alpha) y \; ; \; 0 \le \alpha \le 1\}$$

ونعرف القطعة المستقيمة المفتوحة بين نقطتين كما يلي:

$$M = \{z \; ; \; z = \alpha x + (1-\alpha) y \; ; \; 0 < \alpha < 1\}$$

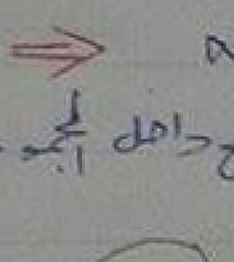
### تعريف المجموعة المحدبة:

ليكن لدينا الفضاء الخطي $\mathbb{R}^n$ ولتكن $S$ مجموعة جزئية منه $S \subseteq \mathbb{R}^n$

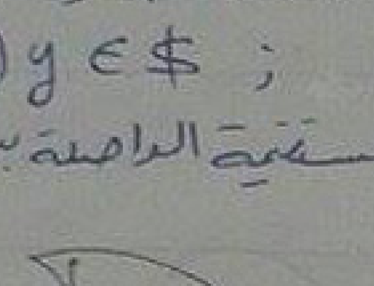
عندئذٍ تكون $S$ مجموعة محدبة إذا حققت:

$$\forall x, y \in S \Rightarrow \alpha x + (1-\alpha) y \in S \; ; \; 0 \le \alpha \le 1$$

"القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين تقع داخل المجموعة"



مجموعة محدبة.



مجموعة غير محدبة

### تمرين:

لتكن $S \subseteq \mathbb{R}^2$ معرفة كما يلي:

$$\$ = \{ (x_1, y_1) \ ; \ y_1 \geq |x_1| \}$$

أثبت أن $\$$ مجموعة محدبة.

الحل:

$$z = \alpha x + (1-\alpha) y$$
$$(z_1, z_2) = \alpha (x_1, y_1) + (1-\alpha)(x_2, y_2)$$
$$z_1 = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$$
$$z_2 = \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2$$

لدينا:

$$y_1 \geq |x_1| \quad , \quad y_2 \geq |x_2|$$

$$\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \geq \alpha |x_1| + (1-\alpha)|x_2|$$
$$\geq |\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2|$$

تمرين:

لتكن $\$ \subseteq R^3$ معرفة كما يلي:

$$\$ = \{ x \ ; \ x = x_1 + 3y_1 - 2z_1 \leq 4 \}$$

أثبت أن $\$$ مجموعة محدبة حيث:

$$x = (x_1, y_1, z_1) \quad , \quad y = (x_2, y_2, z_2)$$
$$z = (x_3, y_3, z_3)$$

الحل:

$$x = x_1 + 3y_1 - 2z_1 \leq 4$$
$$y = x_2 + 3y_2 - 2z_2 \leq 4$$

$$z = \alpha x + (1-\alpha) y$$
$$(x_3, y_3, z_3) = \alpha (x_1, y_1, z_1) + (1-\alpha)(x_2, y_2, z_2)$$
$$x_3 = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$$

$$y_3 = a y_1 + (1-a) y_2$$

$$z_3 = a z_1 + (1-a) z_2$$

$$x_3 + 3y_3 - 2z_3 \overset{?}{\leq} 4$$

$$a x_1 + (1-a) x_2 + 3\left(a y_1 + (1-a) y_2\right) - 2\left(a z_1 + (1-a) z_2\right) =$$
$$= a\left(x_1 + 3y_1 - 2z_1\right) + (1-a)\left(x_2 + 3y_2 - 2z_2\right)$$
$$\leq 4a + 4(1-a) = 4$$

**التركيب الخطي:**

ليكن لدينا الفضاء الخطي $E = \mathbb{R}^n$ (فضاء متجهي)، نقول عن أي متجه $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ; $x \in \mathbb{R}^n$ إنه تركيب خطي إذا احقق ما يلي:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

حيث أنّ:

$\boxed{1}$ $\lambda_i \geq 0 \quad ; \quad i = 1:n$

$\boxed{2}$ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

وعندئذٍ نسمي الفضاء $\mathbb{R}^n$ فضاء خطي محدب.