الأربعاء : 17/12/2014

المحاضرة الحادية والعشرون :

مبرهنة :

لتكن $\$$ مجموعة محدبة ولتكن $p \in \$$ نقطة داخلية و $q \in \$$ حيث $p \neq q$

عندئذ :

$$\exists \alpha \in R \ ; \ \exists t \in \$$$

حيث يكون :
$$p = \alpha t + (1-\alpha) q$$

الإثبات :

$p \in \$$ نقطة داخلية $\Longrightarrow \exists \varepsilon \in R \ , \ N_\varepsilon(p) \subseteq \$$

ولدينا $q \in \$$

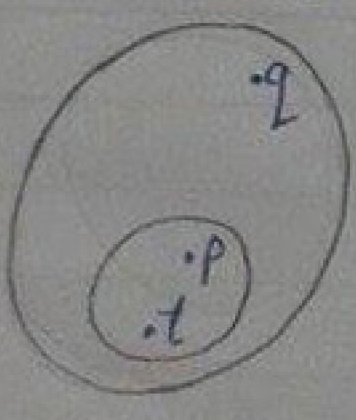
لنفرض أن : $\delta = \|p-q\| > 0$ $\quad (\delta > 0$ لأن $p \neq q)$

ولنفرض أن :

$$t = p + \left(\frac{\varepsilon}{2\delta}\right)(p-q)$$

لنثبت أن : $t \in N_\varepsilon(p)$:

$$\|t-p\| = \left\|\frac{\varepsilon}{2\delta}(p-q)\right\| = \frac{\varepsilon}{2\delta}\|p-q\| = \frac{\varepsilon}{2\delta} \ ; \quad \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$



$$\Longrightarrow t \in N_\varepsilon(p)$$

$$t = p + \frac{\varepsilon}{2\delta} p - \frac{\varepsilon}{2\delta} q$$

$$t = p\left(1 + \frac{\varepsilon}{2\delta}\right) - \frac{\varepsilon}{2\delta} q$$

$$t = p\left(\frac{2\delta + \varepsilon}{2\delta}\right) - \frac{\varepsilon}{2\delta} q$$

$$p\left(\frac{2\delta+\varepsilon}{2\delta}\right) = t + \frac{\varepsilon}{2\delta} q$$

$$p = \frac{2\delta+\varepsilon}{2\delta} t + \frac{\varepsilon}{2\delta+\varepsilon} q$$

نعرف أنه: $a = \dfrac{2\delta}{2\delta+\varepsilon}$

عندئذٍ: $1 - a = 1 - \dfrac{2\delta}{2\delta+\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{2\delta+\varepsilon}$

$$p = at + (1-a)q \quad ; \quad 1 > a > 0$$

تعريفات:

- نسمي مجموعة النقاط الملاصقة للمجموعة المحدبة $\$$ بلصاقة المجموعة $\$$.
- نسمي مجموعة النقاط الداخلية في المجموعة المحدبة $\$$ بداخل المجموعة $\$$.
- تكون المجموعة المحدبة متعددة وجوه في الفضاء R^n إذا كانت تقاطعاً لعدد منته من الفضاءات النصفية المغلقة في R^n.

ملاحظة:

لتكن $\$$ مجموعة محدبة متعددة الوجوه ولتكن $p, q \in \$$ عندئذٍ إذا كانت $t \in \$$ فإن t تكون ذروة إذا كان ما يلي محققاً:

$$t \notin \,]p, q[$$

- غلاف المجموعة $\$$ نرمز له بالرمز $H(\$)$ وداخل $\$$ بـ $\$^\circ$ ولصاقتها بـ $\bar{\$}$

ملاحظة:

الشرط اللازم والكافي لتكون $\$$ مجموعة مفتوحة هو أن يكون $\$ = \$^\circ$

مبرهنة :

إذا كانت S مجموعة محدبة بأن كل من المجموعات التالية مجموعة محدبة :

$$\bar{S} \ , \ S^{\circ} \ , \ H(S)$$

الإثبات :

1- لنثبت أن $H(S)$ محدب علماً أن S محدبة :

أ) $H(S) = \phi \Leftarrow$ $H(S)$ محدبة

ب) $H(S) \neq \phi \Leftarrow$ $\forall \alpha \in]0,1[\quad \exists \tilde{x}, \tilde{y} \in H(S)$

لنثبت أن :

$$\tilde{Z} = \alpha \tilde{x} + (1-\alpha)\tilde{y} \in H(S)$$

ليكن $\varepsilon > 0$ عندئذ $\exists x, y \in S$ بحيث يكون ما يلي محقق :

$$\|x - \tilde{x}\| < \varepsilon \ , \ \|y - \tilde{y}\| < \varepsilon$$

وبما أن S محدبة و $x, y \in S$ فإن :

$$Z = \alpha x + (1-\alpha) y \quad ; \quad 0 < \alpha < 1$$

وبالتالي يكون :

$$\|Z - \tilde{Z}\| = \|[\alpha x + (1-\alpha)y] + [\alpha \tilde{x} + (1-\alpha)\tilde{y}]\|$$
$$= \|\alpha(x - \tilde{x}) + (1-\alpha)(y - \tilde{y})\|$$
$$\leqslant \alpha \|x - \tilde{x}\| + (1-\alpha)\|y - \tilde{y}\|$$
$$< \alpha\varepsilon + (1-\alpha)\varepsilon = \varepsilon$$

$$\|Z - \tilde{Z}\| < \varepsilon \Rightarrow \tilde{Z} \in H(S)$$

إذاً $H(S)$ محدبة.

2- لنثبت أن S° هي مجموعة محدبة :

لنفرض $x, y \in S^{\circ}$ ولتكن $\alpha \in]0,1[$ ولنثبت أن :

$$Z = \alpha x + (1-\alpha) y \in S^{\circ}$$

$$x, y \in S \Leftarrow x, y \in S^{\circ}$$

$$\exists \varepsilon > 0 \ ; \ N_{\varepsilon}(x) \subset S \wedge N_{\varepsilon}(y) \subset S$$

$x, y \in \$ \Rightarrow Z = \alpha x + (1-\alpha) y \in \$$ $\qquad 0<\alpha<1$

$N_\varepsilon(Z) = \alpha(x+\varepsilon) + (1-\alpha)(y+\varepsilon)$

$N_\varepsilon(Z) = \alpha \underbrace{N_\varepsilon(x)}_{\subset \$} + (1-\alpha) \underbrace{N_\varepsilon(y)}_{\subset \$}$ $\quad ; 0<\alpha<1$

$\Rightarrow N_\varepsilon(Z) \subset \$ \quad \Rightarrow Z \in \$$

/ /

الموضوع: ....

حل مسألة على نظرية الألعاب:

وجد حلاً لمسألة المباراة التالية:

وجد نقطة الاستقرار

A \ B	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	2	1	0	-2	-2
x_2	1	0	3	2	0
	2	1	3	2	0 / 1

A) $$Z = t_1 + t_2 \longrightarrow \min$$

$$2t_1 + t_2 \geqslant 1$$

$$t_1 \geqslant 1$$

$$3t_2 \geqslant 1$$

$$-2t_1 + 2t_2 \geqslant 1$$

$$t_1 , t_2 \geqslant 0$$

B) $$F = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \longrightarrow Max$$

$$2S_1 + S_2 - 2S_4 \leqslant 1$$

$$S_1 + 3S_3 + 2S_4 \leqslant 1$$

$$S_1 , S_2 , S_3 , S_4 \geqslant 0$$

الموضوع:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	
S_5	2	1	0	-2	1	0	1
S_6	1	0	3	2	0	1	1
F	-1	-1	-1	-1	0	0	0
S_2	2	1	0	-2	1	0	1
S_6	1	0	3	2	0	1	1
F	1	0	-1	-3	1	0	1
S_2	3	1	3	0	1	1	2
S_4	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
F	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{7}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$

$$F = \frac{5}{2} \quad , S_2 = 2 , \quad S_4 = \frac{1}{2}$$

$$S_1 + S_2 = 0$$

$$S_i = \frac{y_i}{g}$$

$$F = \frac{1}{g} = \frac{2}{5} = g$$

$$y_1 = y_3 = 0 \ , y_2 = \frac{4}{5} , y_4 = \frac{1}{5}$$

$$z = \frac{5}{2} \quad , t_1 = 1 \quad , t_2 = \frac{3}{3}$$

$$x_1 = \frac{2}{5} \quad , \quad x_2 = \frac{3}{5}$$