/ /

المحاضرة السابعة:

تمرين: لتكن G : زمرة ولتكن المجموعة الجزئية في G :

$$Z(G) = \{ a : a \in G \ , \ x \cdot a = a \cdot x \ , \ \forall x \in G \}$$

والتي تسمى مركز الزمرة. أثبت أنّ $Z(G)$ زمرة جزئية في G.

الحل:

• واضح أنّ: $Z(G) \subseteq G$ ولنثبت أنها غير خالية:

$$\forall x \in G : e \cdot x = x \cdot e \Rightarrow e \in Z(G) \Rightarrow Z(G) \neq \phi$$

• ليكن: $a, b \in Z(G)$ عندئذٍ يحققان:

$$\forall x \in G : \begin{cases} a \cdot x = x \cdot a \\ b \cdot x = x \cdot b \end{cases}$$

• ولنبرهن أنّ: $a \cdot b^{-1} \in Z(G)$ أي يجب أن نبرهن أنّ:

$$\boxed{x \cdot (a \cdot b^{-1}) = (a \cdot b^{-1}) \cdot x}$$

ولبرهان ذلك سوف نبين أنّ: $b^{-1} \in Z(G)$ « لأننا سنحتاج ذلك في البرهان »

$$\{ b \cdot x = x \cdot b \Rightarrow x = b^{-1} \cdot x \cdot b \Rightarrow x \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot x \} \quad (*)$$

$$\underbrace{x \cdot (a \cdot b^{-1}) = (x \cdot a) \cdot b^{-1}}_{\text{الضرب في } G \text{ تجميعي}} = \underbrace{(a \cdot x) \cdot b^{-1}}_{xa = a \cdot x} = \underbrace{b^{-1} \cdot (a \cdot x)}_{(*) \text{ حسب}}$$

$$= \underbrace{(b^{-1} \cdot a) \cdot x = (a \cdot b^{-1}) \cdot x}_{a, b^{-1} \in Z(G) \text{ لأنّ:}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x \cdot (a \cdot b^{-1}) = (a \cdot b^{-1}) \cdot x}$$

$$\Rightarrow \quad a \cdot b^{-1} \in Z(G)$$

ومنه يكون: $Z(G)$ زمرة جزئية في G.

تمهيدية: لتكن G زمرة، تقاطع أي أسرة من الزمر الجزئية في G هو زمرة جزئية في G.

البرهان:

• لتكن Σ أسرة من الزمر الجزئية في G أي أن:

$$\Sigma = \{A_i \; ; \; i\in I\}$$

• لنثبت أن: $\bigcap_{i\in I} A_i$ غير خالية.

$$\forall i\in I: e\in A_i \Rightarrow e\in \bigcap_{i\in I}A_i$$

$$\Rightarrow \emptyset \neq \bigcap_{i\in I} A_i \subset G$$

• ليكن: $\boxed{x,y\in\bigcap_{i\in I}A_i}$ ولنثبت أن: $\boxed{x.y^{-1}\in\bigcap_{i\in I}A_i}$ فتكون $\bigcap_{i\in I}A_i$ زمرة جزئية في G.

إن: $\boxed{x,y\in \bigcap_{i\in I} A_i} \Rightarrow \forall i\in I: x,y\in A_i$

وبما أن A_i زمرة جزئية في G:

$$\Rightarrow \forall i \in I: x.y^{-1}\in A_i$$

$$\Rightarrow \boxed{x.y^{-1}\in\bigcap_{i\in I} A_i}$$

ومنه $\bigcap_{i\in I} A_i$ زمرة جزئية في G.

ملاحظة: إن اجتماع زمرتين جزئيتين ليس بالضرورة أن يكون زمرة جزئية.

• لنأخذ من زمرة الأعداد الصحيحة الزمرتين الجزئيتين $3\mathbb{Z}$ ، $2\mathbb{Z}$

$$2\mathbb{Z} = \{0, \mp2, \mp4, \mp6, ...\}$$

$$3\mathbb{Z} = \{0, \mp3, \mp6, \mp9, ...\}$$

• واضح أن: $2\mathbb{Z}\subset \mathbb{Z}$ ، $3\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}$

• إن: $2,3\in 2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}$ لكن: $2+3=5\notin 2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}$

وهذا يبين أنّ: (+) ليست داخلية في: $(2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z})$

ومنه: $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ ليست زمرة

زمرة الجمع بالمقاس n:

. ليكن: $n > 1$ عدد صحيح، لنأخذ المجموعة:

$$\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,3,\dots,(n-1)\}.$$

إذن: $\operatorname{card} \mathbb{Z}_n = n$.

. نعرف على: $\mathbb{Z}_n$ العملية $\oplus$ بالشكل الآتي:

$\forall a,b \in \mathbb{Z}_n \;;\; a \oplus b = r \in \mathbb{Z}_n$: r باقي قسمة $a+b$ على n.

أي: $r = (a+b) \bmod n$

. مثلاً: من أجل: $n = 5$ تكون: $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

ملاحظة: إن المجموعة $\mathbb{Z}_n$ بالنسبة لعملية الجمع بالمقاس $\oplus$ تشكل زمرة تبديلية العنصر الحيادي فيها هو الصفر (0) ولكل عنصر في $\mathbb{Z}_n$ نظير.

. ويمكننا التعرف على مقلوب كل عنصر من خلال النظر إلى ناتج التشكيل حيث أنّ:
نظير الصفر هو الصفر لأنهما شكلا الحيادي معاً، نظير (1) هو (4) لأنهما شكلا الحيادي معاً...
فيكون جدول نظائر العناصر على الشكل:

a	0	1	2	3	4
$-a$	0	4	3	2	1

ملاحظة: ليكن $n>1$ عدد صحيح، $\forall a,b \in \mathbb{Z}_n$ فإنّ:

$$a \oplus b = \begin{cases} a+b & \text{if } a+b<n \\ (a+b)-n & \text{if } a+b>n \end{cases}$$

وكما أنه أياً كان $a \in \mathbb{Z}_n$ فإنّ: $-a = n-a$

زمرة الضرب بالمقاس n:

• ليكن $n>1$ عدد صحيح، لنأخذ المجموعة:

$$U(n) = \{n : m \in \mathbb{N}^* ; m<n \wedge \gcd(n,m)=1\}$$

$n=4 \Rightarrow U(4)=\{1,3\}$ ، $n=5 \Rightarrow U(5)=\{1,2,3,4\}$

• لنعرف على المجموعة $U(n)$: عملية ضرب بالشكل:

$$\forall a,b \in U(n) \quad a \odot b = (a \cdot b) \bmod - n \in U_n$$

r باقي قسمة $a \cdot b$ على n: $0 \leq r < n$; $a \cdot b = q \cdot n + r$

• فمن أجل: $n=5$ يكون: $U(5)=\{1,2,3,4\}$

ومن أجل: $n=4$ يكون: $U(4)=\{1,3\}$

• نلاحظ أنه من n عدد طبيعي أولي تكون: $U(n)=\{1,2,\ldots,n-1\}$

«لأن العدد الأولي نسبياً مع كل الأعداد التي تصغره» فمثلاً:

$$U(7)=\{1,2,3,4,5,6\}$$

$$U(23)=\{1,2,\ldots,22\}$$

• ولندرس الزمرة $U(5)$.

$\odot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

ملاحظة:
إنّ المجموعة $U(n)$ زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس ($\otimes$) والعنصر المحايد فيها هو الواحد.
وكل عنصر من $U(n)$ مقلوب.

. ويمكننا التعرف إلى مقلوب كل عنصر من خلال النظر إلى نتائج التشكيل حيث أن
مقلوب الواحد هو الواحد لأنهما شكلا المحايد معاً.
مقلوب (2) هو (3) لأنهما شكلا المحايد معاً..
وهكذا فيكون جدول مقلوب العناصر على النحو التالي:

a	1	2	3	4
a'	1	3	2	4

. مبرهنة:

ليكن: $n > 1$ عدداً صحيحاً، $D = \{1, 2, 3, ..., n-1\}$ أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة D زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس n هو أن يكون العدد n أولياً.

الإثبات:

. لزوم الشرط: «لنفرض أن D زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس n»

. ولنفرض جدلاً أن n ليس أولي.

. بما أن: $n \in D$ و n لا أولي فإنه يوجد: $K, h \in D$

. بحيث:

أي: $n = K.h \ : \ 1 < K, h < n$ $\quad 1<k<n$, $1<h<n$

. وهذا يبين أن: $K, h \in D$

. وبما أن D زمرة فإن: $K.h \in D$

$\Leftarrow \quad 0 = K.h \in D$ لأن: $K.h = 0$ لأن:

النهاية (0) هي باقي قسمة $n = k.h$ على n

وباقي قسمة n على n هو الصفر».

. لكن: $0 \notin D$، ومنه الفرض الجدلي خاطئ.

. ~~[illegible]~~ ومنه العدد n أولي.

• كفاية الشرط : لنبرهن أنّ $\boxed{D=U(n)}$.

• بما أنّ n أولي نجد أنّ : $\boxed{U(n)\subseteq D}$

• ليكن : $y\in D$ عندئذٍ: $1\leq y<n$ ومنه: y و n أوليان فيما بينهما لأنّ n أولي وبالتالي: $y\in U(n)$

ومنه: $\boxed{D\subseteq U(n)}$

• ومن الاحتوائين: $D\subseteq U(n)$ ، $U(n)\subseteq D$

نجد أنّ : $\boxed{D=U(n)}$

• ومنه تكون D زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس n.

المرافقات والدليل :

• تعريف :

• لتكن G زمرة و A , B مجموعات جزئية غير خالية في G

نسمي المجموعة : $A\cdot B=\{a\cdot b : a\in A, b\in B\}$

بضرب المجموعات في G.

• إذا كانت إحدى المجموعتين وحيدة العنصر مثلاً إذا كانت $A=\{a\}$ عندئذٍ :

$A\cdot B = a\cdot B=\{a\cdot b : b\in B\}$

إذا كانت : $B=\{b\} \Longrightarrow A\cdot B = A\cdot b=\{a\cdot b : a\in A\}$

• تعريف :

لتكن G زمرة ، H زمرة جزئية في G و $a\in G$ عندئذٍ :

نسمي المجموعة : $a\cdot H=\{a\cdot b : b\in H\}$

مرافقة يسارية للزمرة الجزئية H في G (المولدة بالعنصر a)

ونسمي المجموعة : $H\cdot a=\{b\cdot a : b\in H\}$

مرافقة يمينية للزمرة الجزئية H في G (المولدة بالعنصر a).

مثال: لتكن $(\mathbb{Z}_9,+)$ زمرة، لنأخذ الزمرة الجزئية H في $(\mathbb{Z}_9,+)$

$H=\{0,3,6\}$ أوجد جميع المرافقات اليسارية للزمرة H.

الحل:

$\forall a\in\mathbb{Z}$ فإن: $a+H$ مرافقة يسارية للزمرة H

$0+H=\{0,3,6\}$, $1+H=\{1,4,7\}$, $2+H=\{2,5,8\}$

$3+H=\{3,6,0\}$, $4+H=\{4,7,1\}$, $5+H=\{5,8,2\}$

$6+H=\{6,0,3\}$, $7+H=\{7,1,4\}$, $8+H=\{8,2,5\}$

نلاحظ أن:

$$0+H=3+H=6+H=H$$

$$1+H=4+H=7+H$$

$$2+H=5+H=8+H$$

وبذلك يكون لدينا ثلاثة مرافقة يسارية: $H\,,\,1+H\,,\,2+H$

مبرهنة: لتكن G زمرة، H زمرة جزئية في G عندئذ تكون القضايا التالية صحيحة:

1) $a\in a.H$

2) $a.H=H$ عندما وفقط عندما $a\in H$

3) إما: $a.H\cap b.H=\emptyset$ أو: $a.H=b.H$

4) $a.H=b.H$ عندما وفقط عندما: $a^{-1}.b\in H$

5) $a.H$ زمرة جزئية في G عندما وفقط عندما $a\in H$.

6) أياً كان: $a,b\in G$ فإن:

$$\text{card}\, a.H=\text{card}\, b.H=\text{card}\, H$$

الإثبات:

1) $a=a.e\in a.H$ وذلك لأن: $e\in H$ «لأن H زمرة».

2) لزوم الشرط: «لنفرض أن $\boxed{a.H=H}$ ولنثبت أن: $\boxed{a\in H}$»

. لنفرض أن: $\boxed{a.H=H}$ عندئذ وبما أن: $e\in H=a.H$

. وبالتالي يوجد: $h\in H$ بحيث يكون: $e=a.h$

ومنه يكون: $a=h^{-1}.e$

$\Rightarrow \boxed{a=h^{-1}\in H}$ «لأن H زمرة وبالتالي $h\in H$ لمناظره $h^{-1}\in H$»

كفاية الشرط: «لنفرض أن: $\boxed{a\in H}$ ولنثبت أن: $\boxed{a.H=H}$»

• لنفرض أن: $\boxed{a\in H}$:

. ليكن: $\boxed{K\in H}$ عندئذ:

$$K=e.K=a.a^{-1}.K=a.\overline{(a^{-1}.K)}^{\in H}$$

. ومنه يكون: $\boxed{K\in a.H}$

. وبالتالي فإن: $\left[H\subseteq a.H\right]$

. ليكن: $\boxed{y\in a.H}$ عندئذ يوجد $h_0\in H$ بحيث: $y=a.h_0$

وبما أن: $a, h_0\in H$ فإن: $a.h_0\in H$ «لأن H زمرة»

ومنه: $\boxed{y=a.h_0\in H}$

. وبالتالي فإن:

$$\left[a.H\subseteq H\right].$$

. ومن الاحتواءين $a.H\subseteq H$ ، $H\subseteq a.H$

ينتج لدينا:

$$\boxed{a.H=H}$$

3) . لدينا: $a.H , b.H$ مجموعات جزئية في G

. إذا كانت: $a.H\cap b.H=\phi$ يتم المطلوب.

. أما إذا كانت: $a.H\cap b.H\neq\phi$ فإنه يوجد: $d\in a.H\cap b.H$

. ومنه يكون: $d\in a.H$ وبالتالي يوجد $K_1\in H$ بحيث: $d=a.K_1$

. وأيضاً يكون: $d\in b.H$ ومنه يوجد $K_2\in H$ بحيث: $d=b.K_2$

$$\left.\begin{array}{l} d\cdot H = a\cdot \underline{K_1\cdot H} = a\cdot \underline{H} \\ d\cdot H = b\cdot \underline{K_2\cdot H} = b\cdot \underline{H} \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot H = b\cdot H$$

لأن: « $K_1\cdot H = H$ و $K_2\cdot H = H$ » لأن: $K_1, K_2 \in H$ « حسب (2) ».

4). لزوم الشرط: لنفرض أنّ: $\boxed{a\cdot H = b\cdot H}$ عندئذٍ:

$b \in b\cdot H = a\cdot H$ « حسب (1) ».

• ومنه يوجد $h \in H$ بحيث:

$$b = a\cdot h$$

• ومنه يكون: $\boxed{a^{-1}\cdot b = h \in H}$

• كفاية الشرط: لنفرض أنّ: $a^{-1}\cdot b \in H$ عندئذٍ يوجد $K \in H$ بحيث:

$$a^{-1}\cdot b = K$$

$$\left.\begin{array}{l} b = a\cdot K \in a\cdot H \\ \underline{b \in b\cdot H} \\ \text{حسب الخاصة (1)} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{حسب (3)}} a\cdot H = b\cdot H$$

5). لزوم الشرط: لنفرض أنّ: $a\cdot H$ زمرة جزئية في G عندئذٍ:

$$e \in a\cdot H \Rightarrow \exists h \in H : e = a\cdot h$$

$$\Rightarrow a = e\cdot h^{-1} \in H$$ « لأن H زمرة وبالتالي $h \in H$ له نظير $h^{-1} \in H$ »

• كفاية الشرط:

• لنفرض أنّ: $a \in H$ وحسب «2» من هذه المبرهنة يكون:

$$a\cdot H = H$$

• وبما أنّ H زمرة جزئية تكون: $a\cdot H$ زمرة.

6) .. لنعرف الملاقة : $f : a.H \longrightarrow b.H$

بالشكل التالي : $\forall a.h \in a.H : f(a.h) = b.h$

• إن الملاقة $\boxed{f \text{ تطبيق}}$ لأنه إذا كان : $a.h_1, a.h_2 \in a.H$ حيث :

$$a.h_1 = a.h_2 \Rightarrow h_1 = h_2 \Rightarrow b.h_1 = b.h_2$$
$$\Rightarrow f(a.h_1) = f(a.h_2)$$

• إن $\boxed{\text{التطبيق } f \text{ متباين}}$ لأنه إذا كان : $a.h_1, a.h_2 \in H$ حيث :

$$f(a.h_1) = f(a.h_2) \Rightarrow b.h_1 = b.h_2$$
$$\Rightarrow h_1 = h_2$$
$$\Rightarrow a.h_1 = a.h_2$$

• إن $\boxed{\text{التطبيق } f \text{ غامر}}$ لأنه إذا كان : $y \in b.H$ فإنه يوجد $h_0 \in H$ حيث أن :

$$y = b.h_0$$

وبالتالي يكون : $a.h_0 \in a.H$ حيث :

$$f(a.h_0) = b.h_0$$

• مما سبق نجد أن التطبيق f تقابل أي :

$$\text{card } a.H = \text{card } b.H$$

وبما أن : $a, e \in G$ فإنه حسب ما تم إثباته الآن يكون :

$$\text{Card } a.H = \text{card } e.H = \text{card } H$$

- انتهت المحاضرة السابعة -