The matrix A has the pair of complex conjugate eigenvalues

$$2.4069\ldots \pm i \times 3.2110\ldots$$

and the real eigenvalue $0.1863\ldots$. The standard (complex) Schur form is given by the pair of matrices

$$V = \begin{pmatrix} 0.3381 - 0.8462i & 0.3572 - 0.1071i & 0.1749 \\ 0.3193 - 0.0105i & -0.2263 - 0.6786i & -0.6214 \\ 0.1824 + 0.1852i & -0.2659 - 0.5277i & 0.7637 \end{pmatrix}$$

and

$$S = \begin{pmatrix} 2.4069 + 3.2110i & 4.6073 - 4.7030i & -2.3418 - 5.2330i \\ 0 & 2.4069 - 3.2110i & -2.0251 - 1.2016i \\ 0 & 0 & 0.1863 \end{pmatrix}.$$

It is possible to avoid complex arithmetic by using the quasi-Schur form, which consists of the pair of matrices

$$U = \begin{pmatrix} -0.9768 & 0.1236 & 0.1749 \\ -0.0121 & 0.7834 & -0.6214 \\ 0.2138 & 0.6091 & 0.7637 \end{pmatrix}$$

and

$$R = \begin{pmatrix} 1.3129 & -7.7033 & 6.0407 \\ 1.4938 & 3.5008 & -1.3870 \\ 0 & 0 & 0.1863 \end{pmatrix}.$$

We conclude this section by pointing out that the Schur and the quasi-Schur forms of a given matrix are in no way unique. In addition to the dependence on the ordering of the eigenvalues, any column of Q can be multiplied by a complex sign $e^{i\theta}$ and a new corresponding R can be found. For the quasi-Schur form, there are infinitely many ways to select the 2×2 blocks, corresponding to applying arbitrary rotations to the columns of Q associated with these blocks.

1.8.4 Application to Powers of Matrices

The analysis of many numerical techniques is based on understanding the behavior of the successive powers A^k of a given matrix A. In this regard, the following theorem plays a fundamental role in numerical linear algebra, more particularly in the analysis of iterative methods.

Theorem 1.10. *The sequence A^k, $k = 0, 1, \ldots$, converges to zero iff $\rho(A) < 1$.*

Proof. To prove the necessary condition, assume that $A^k \to 0$ and consider u_1 a unit eigenvector associated with an eigenvalue λ_1 of maximum modulus. We have

$$A^k u_1 = \lambda_1^k u_1,$$

which implies, by taking the 2-norms of both sides,

$$|\lambda_1^k| = \|A^k u_1\|_2 \to 0.$$

This shows that $\rho(A) = |\lambda_1| < 1$.

$\|A\|_1$ $\|A\|_F$ $\|A\|_\infty$

$\|v\|_1$ $\|v\|_2$ $\|v\|_\infty$

The Jordan canonical form must be used to show the sufficient condition. Assume that $\rho(A) < 1$. Start with the equality

$$A^k = XJ^kX^{-1}.$$

To prove that A^k converges to zero, it is sufficient to show that J^k converges to zero. An important observation is that J^k preserves its block form. Therefore, it is sufficient to prove that each of the Jordan blocks converges to zero. Each block is of the form

$$J_i = \lambda_i I + E_i,$$

where E_i is a nilpotent matrix of index l_i; i.e., $E_i^{l_i} = 0$. Therefore, for $k \geq l_i$,

$$J_i^k = \sum_{j=0}^{l_i-1} \frac{k!}{j!(k-j)!} \lambda_i^{k-j} E_i^j.$$

Using the triangle inequality for any norm and taking $k \geq l_i$ yields

$$\|J_i^k\| \leq \sum_{j=0}^{l_i-1} \frac{k!}{j!(k-j)!} |\lambda_i|^{k-j} \|E_i^j\|.$$

Since $|\lambda_i| < 1$, each of the terms in this *finite* sum converges to zero as $k \to \infty$. Therefore, the matrix J_i^k converges to zero. □

An equally important result is stated in the following theorem.

Theorem 1.11. *The series*

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

converges iff $\rho(A) < 1$. Under this condition, $I - A$ is nonsingular and the limit of the series is equal to $(I - A)^{-1}$.

Proof. The first part of the theorem is an immediate consequence of Theorem 1.10. Indeed, if the series converges, then $\|A^k\| \to 0$. By the previous theorem, this implies that $\rho(A) < 1$. To show that the converse is also true, use the equality

$$I - A^{k+1} = (I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^k)$$

and exploit the fact that, since $\rho(A) < 1$, then $I - A$ is nonsingular and, therefore,

$$(I - A)^{-1}(I - A^{k+1}) = I + A + A^2 + \cdots + A^k.$$

This shows that the series converges since the left-hand side will converge to $(I - A)^{-1}$. In addition, it shows the second part of the theorem. □

Another important consequence of the Jordan canonical form is a result that relates the spectral radius of a matrix to its matrix norm.

Theorem 1.12. *For any matrix norm $\|\cdot\|$, we have*

$$\lim_{k \to \infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A).$$

Proof. The proof is a direct application of the Jordan canonical form and is the subject of Exercise 10. □

1.9 Normal and Hermitian Matrices

This section examines specific properties of normal and Hermitian matrices, including some optimality properties related to their spectra. The most common normal matrices that arise in practice are Hermitian and skew Hermitian.

1.9.1 Normal Matrices

By definition, a matrix is said to be normal if it commutes with its transpose conjugate, i.e., if it satisfies the relation

$$A^H A = AA^H. \tag{1.29}$$

An immediate property of normal matrices is stated in the following lemma.

Lemma 1.13. *If a normal matrix is triangular, then it is a diagonal matrix.*

Proof. Assume, for example, that A is upper triangular and normal. Compare the first diagonal element of the left-hand side matrix of (1.29) with the corresponding element of the matrix on the right-hand side. We obtain that

$$|a_{11}|^2 = \sum_{j=1}^{n} |a_{1j}|^2,$$

which shows that the elements of the first row are zeros except for the diagonal one. The same argument can now be used for the second row, the third row, and so on to the last row, to show that $a_{ij} = 0$ for $i \neq j$. □

A consequence of this lemma is the following important result.

Theorem 1.14. *A matrix is normal iff it is unitarily similar to a diagonal matrix.*

Proof. It is straightforward to verify that a matrix that is unitarily similar to a diagonal matrix is normal. We now prove that any normal matrix A is unitarily similar to a diagonal matrix. Let $A = QRQ^H$ be the Schur canonical form of A, where Q is unitary and R is upper triangular. By the normality of A,

$$QR^H Q^H QRQ^H = QRQ^H QR^H Q^H$$

or

$$QR^H RQ^H = QRR^H Q^H.$$

Upon multiplication by Q^H on the left and Q on the right, this leads to the equality $R^H R = RR^H$, which means that R is normal and, according to the previous lemma, this is only possible if R is diagonal. □

Thus, any normal matrix is diagonalizable and admits an orthonormal basis of eigenvectors, namely, the column vectors of Q.

The following result will be used in a later chapter. The question that is asked is, Assuming that any eigenvector of a matrix A is also an eigenvector of A^H, is A normal? If

المحاضرة التاسعة :

"الصفحة الثامنة عشر"

18.4 تقنيات قوى المصفوفة :

إن تحليل العديد من التقنيات العددية يعتمد على سلوك القوى المتعاقبة A^k لمصفوفة معطاة A.

فيما يتعلق بذلك، النظرية التالية تلعب دوراً أساسياً في الجبر الخطي العددي، وبشكل خاص في تحليل الطرق التكرارية.

نظرية 1.15 :

التتالية A^k تتقارب من الصفر إذا وفقط إذا كان نصف القطر الطيفي للمصفوفة A أصغر تماماً من 1.

البرهان : (غير مطلوب رياضياً)

لبرهان الشرط اللازم، نفرض أن $A^k \to 0$ ونعتبر u_1 شعاع ذاتي واحدي مرتبط بالقيمة الذاتية λ_1 الأكبر قيمة.

لدينا :

$$A^k u_1 = \lambda_1^k u_1.$$

الذي يؤدي بأخذ النظيم الثاني للطرفين.

$$|\lambda_1^k| = \|A^k u_1\|_2 \to 0$$

وهذا يبين أن $\rho(A) = |\lambda_1| < 1$

"الصفحة التاسعة عشر"

(كفاية الشرط) the sufficient condition

(بداية الصفحة 19 محذوفة)

نظرية 1.11 : المتسلسلة

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

تتقارب المتسلسلة إذا وفقط إذا كان $\rho(A) < 1$ تكون المصفوفة عندها $I-A$ غير شاذة ونهاية هذه المتسلسلة تساوي مقلوب $I-A$.

البرهان : (غير مطلوب رياضياً)

إن الجزء الأول من المبرهنة هو نتيجة مباشرة للمبرهنة 1.10
في الحقيقة إذا تقاربت المتسلسلة فإن الحد العام يسعى إلى الصفر
من النظرية السابقة هذا يؤدي إلى أن $\rho(A)<1$
لاستنتاج أن العكس أيضاً صحيح استخدم المساواة:

$$I - A^{k+1} = (I-A)(I+A+A^2+\dots+A^k)$$

وباستخدام الحقيقة وهي الحالات $\rho(A)<1$ فإن $I-A$ غير شاذة وعندئذ:

$$(I-A)^{-1}(I-A^{k+1}) = I+A+A^2+\dots+A^k.$$

وهذا يوضح أن المتسلسلة تتقارب حالما الطرف اليساري من المساواة السابقة يتقارب نحو $(I-A)^{-1}$

بالإضافة لذلك فإنه يوضح الجزء الثاني من المبرهنة.
نتيجة أخرى هامة لشكل جوردن القانوني تربط بين نصف القطر الطيفي للمصفوفة ونظيم هذه المصفوفة.

نظرية 1.12 :
من أجل أي نظيم للمصفوفة لدينا:

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$$

البرهان:
هو نتيجة مباشرة لشكل جوردن القانوني.

((الصفحة العشرون)) :

1.9 المصفوفات الناظمية والهرمتية.
يدرس هذا الفصل خواص عديدة للمصفوفات الناظمية والهرمتية تتضمن الخواص المثلى المتعلقة بها.
أكثر المصفوفات الناظمية شيوعاً التي تظهر في التطبيقات هي مصفوفات هرمتية وهرمتية متخالفة.

1.9.1 المصفوفات الناظمية:
بالتعريف يقال عن مصفوفة A أنها ناظمية إذا كانت متبادلة مع منقول مرافقها.
أي إذا حققت العلاقة $A^HA = AA^H$ (1.29)

خاصية مباشرة للمصفوفة الناظمية في المرتبة التالية:

ثم Lemma 1.13 : هامة:

إذا كانت المصفوفة الناظمية مثلثية عندها تكون قطرية.

البرهان: محذوف.

نظرية 1.14 : هامة:

تكون المصفوفة ناظمية إذا وفقط إذا كانت تشابه مصفوفة قطرية وشبيهاً واحداً.

البرهان: محذوف:

"إذاً هو أربع أسطر من الصفحة 20"

وهكذا، كل مصفوفة ناظمية تكون قابلة للتقطير وتقبل قاعدة متعامدة منظمة من الأشعة الذاتية.

نسمي الأشعة العمودية Q حيث Q المصفوفة الواحدية.

النتيجة التالية سنستخدم في مثال لاحق.

السؤال الذي يطرح نفسه: بما أن الأشعة الذاتية للمصفوفة A هي أشعة ذاتية المصفوفة A^H أيضاً، هل عندها تكون المصفوفة ناظمية.

سؤال امتحاني: ما هي المصفوفة الناظمية؟

(السنة الجامعة التاسعة)