المحاضرة الثالثة عشرة:

مبرهنة: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G، الزمرة الجزئية من زمرة الخارج G/H هي من الشكل: N/H حيث: N زمرة جزئية في G تحوي H.

الإثبات:

- لدينا: G/H زمرة (وهي موجودة لأنّ H ناظمية في G)
- لتكن: $\overline{N}$ زمرة جزئية في الزمرة G/H ولنبرهن أنّ:

$$\{\overline{N} = N/H\}$$

حيث: N زمرة جزئية في G تحوي: H.

- ولنأخذ المجموعة: $N = \{g ; g \in G , g.H \in \overline{N}\}$ فنجد أنّ $N \neq \phi$

وذلك لأنّ: $e.H = H \in \overline{N}$

- ليكن: $x,y \in N$ عندئذٍ: $x,y \in G$; $x.H , y.H \in \overline{N}$
- وبما أنّ $\overline{N}$ زمرة جزئية فإنّ:

$$(x.H).(y.H)^{-1} \in \overline{N}$$

$$\Rightarrow (x.H).(y^{-1}.H) \in \overline{N}$$

$$\Rightarrow (x.y^{-1}).H \in \overline{N}$$

- وحسب تعريف المجموعة N نجد أنّ: $x.y^{-1} \in N$
- ومنه: N زمرة جزئية في G.
- $\forall h \in H : h.H = H \in \overline{N}$

وحسب تعريف المجموعة N يكون: $h \in N$

ومنه: $H \subseteq N$

- ومنه: N زمرة جزئية في G تحوي H
- كما أنّ الزمرة الجزئية H ناظمية في N

- ولنبرهن الآن أنّ: $\overline{N} = N/H$

$$N/H = \{x.H \,;\, x \in N\}$$

. ليكن $\bar{y} \in \bar{N}$ عندئذ: $\bar{y} \in G/H$ (لأن $\bar{N}$ زمرة جزئية فيها)

وبالتالي: $\bar{y} = y.H$ حيث: $y \in G$.

حسب تعريف N فإن: $y \in N$ ومنه

$$\bar{y} = y.H \in N/H$$

$$\Rightarrow \quad \{\bar{N} \subseteq N/H\}$$

. ليكن: $\bar{x} \in N/H$ ومنه عندئذ: $\bar{x} = x.H$ بحيث: $x \in N$ ومنه $x \in G$

$$\bar{x} = x.H \in G/H$$

$$\bar{x} = x.H \in \bar{N}$$

$$\Rightarrow \quad \{N/H \subseteq \bar{N}\}$$

. ومنه: من الاحتوائين:

$$\{\bar{N} = N/H\}$$

التشاكلات الزمرية:

. تعريف (التشاكل الزمري): لتكن: $(G,.)$ و $(G',.)$ زمرتين

وليكن التطبيق: $f : G \longrightarrow G'$

نقول عن f إنه تشاكل زمري (هومومورفيزم) Homomorphism

إذا تحقق الشرط:

$$\forall x, y \in G : f(x.y) = f(x).f(y)$$

. تعريف نواة تشاكل زمري: ليكن: $f : G \to G'$ تشاكل زمري عندئذ ندعو المجموعة:

$\boxed{Ker(f) = \{a \,;\, a \in G, f(a) = e'\} ; e' \in G'}$ بنواة التشاكل الزمري f

مبرهنة: ليكن: $f : G \longrightarrow G'$ تشاكل زمري عندئذ:

1). $f(e) = e'$

2). أياً كان: $g \in G$ عندئذ: $f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}$

3). من أجل أي عدد صحيح: $n \in \mathbb{Z}$، وأياً كان: $a \in G$ فإن:

$$f(a^n) = [f(a)]^n$$

4). $\ker f$ زمرة جزئية ناظمية في G.

الإثبات:

1) لدينا: $e = e.e \in G$

$$\underbrace{f(e) = f(e.e) = f(e).f(e)}_{\text{لأن: } f \text{ تشاكل}}$$

$$\Rightarrow f(e) = f(e).f(e)$$

$$\Rightarrow [f(e)]^{-1}.f(e) = [f(e)]^{-1}.f(e).f(e)$$

$$\Rightarrow e' = e'.f(e)$$

$$\Rightarrow \{f(e) = e'\}$$

2). ليكن: $g \in G$ عندئذٍ: $e = g^{-1}.g$

$$f(g.g^{-1}) = f(g).f(g^{-1}) = f(e) = e'$$

$$\Rightarrow [f(g)]^{-1}.f(g).f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}.e'$$

$$e'.f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}.e'$$

$$\Rightarrow \{f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}\}$$

3). ليكن: $a \in G$, $n \in \mathbb{Z}$

$$a^n = \underbrace{a.a.\dots.a}_{n \text{ مرة}} = [a(\underbrace{a.a.\dots.a}_{(n-1) \text{ مرة}})]$$

$$f(a^n) = f(\underbrace{a.a.\dots.a}_{n \text{ مرة}}) = f(a(\underbrace{a.a.\dots.a}_{(n-1) \text{ مرة}}))$$

$$f(a^n) = f(a).\dots.f(a) = [f(a)]^n$$

4) لدينا حسب التعريف: $Ker(f) \subseteq G$ ، وبما أنّ: $f(e)=e'$

يكون: $e \in Ker(f) \neq \phi$

. ليكن: $a, b \in Ker(f)$ عندئذٍ: $f(a)=f(b)=e'$

$$f(a.b^{-1}) = f(a).f(b^{-1}) = e'.[f(b)]^{-1}$$
$$= e'.(e')^{-1} = e'$$

$$\Rightarrow f(a.b^{-1}) = e'$$

ومنه: $a.b^{-1} \in Ker(f)$

. وبالتالي: $Ker(f)$ زمرة جزئية

. لنبرهن الآن على أنّ:

$$\left\{ \forall a \in G : a.Ker(f).a^{-1} \subseteq Ker(f) \right\}?$$

. ليكن: $y \in a.Ker(f).a^{-1}$ عندئذٍ يوجد $x \in Ker(f)$ حيث:

$$y = a.x.a^{-1}$$

$$f(y) = f(a.x.a^{-1}) = f(a).f(x.a^{-1})$$
$$= f(a).f(x).f(a^{-1})$$
$$= f(a).e'.f(a^{-1})$$
$$= f(a).e'.[f(a)]^{-1}$$
$$= e'$$

$$\Rightarrow f(y) = e'$$

. ومنه: $y \in Ker(f)$

$$\Rightarrow \left\{ \boxed{a.Ker(f).a^{-1} \subseteq Ker(f)} \right\}$$

أي أنّ الزمرة $Ker(f)$ ناظمية في G .

مبرهنة: ليكن $f : G \longrightarrow G'$ تشاكل زمرة عندئذ

1) إذا كانت: H زمرة جزئية في G فإن: f(H) زمرة جزئية في G'.

2) إذا كانت: H زمرة جزئية ناظمية في G فإن: f(H) زمرة جزئية ناظمية في $Im(f)$

3) إذا كانت H زمرة جزئية في G ودوارة فإن: f(H) دوارة.

4) إذا كانت H زمرة جزئية في G وتبديلية فإن: f(H) تبديلية.

الإثبات:

1) لتكن: H زمرة جزئية في G:

الصورة المباشرة لمجموعة $f(H)=\{f(h) : h\in H\}$

لدينا: $e\in H$ ومنه فإن:

$$f(e)=e' \in f(H)$$
$$\Rightarrow f(e)\in f(H)\subseteq G'$$
$$\Rightarrow f(H)\neq \emptyset$$

ليكن: $x,y\in f(H)$ عندئذ يوجد $a,b\in H$ بحيث:

$$x=f(a)\quad,\quad y=f(b)$$
$$x.y^{-1}=f(a).[f(b)]^{-1}=f(a).f(b^{-1})$$
$$=f(\underbrace{a.b^{-1}}_{\in H})$$

$\Rightarrow f(a.b^{-1})\in f(H) \Rightarrow$ f(H) زمرة جزئية في G'

2) لدينا: $Im(f)=f(G)$ زمرة جزئية في G'

وإن: $f(H)\subseteq f(G)=Im(f)$

وبالتالي: f(H) زمرة جزئية في $Im(f)$، ولنبرهن أنها ناظمية

أي لنبرهن أن: $\forall g\in Im(f) : g.f(H).g^{-1}\subseteq f(H)$

بما أن: $g\in Im(f)$ فإنه يوجد $a\in G$ بحيث: $g=f(a)$

أي يجب إثبات أن: $[\,f(a).f(H).[f(a)]^{-1}\subseteq f(H)\,]$

ليكن: $z\in f(a).f(H).[f(a)]^{-1}$ ومنه:

$$z=f(a).y.[f(a)]^{-1}\quad ; \quad y\in f(H)$$

• وبالتالي يوجد : $h \in H$ بحيث : $y = f(h)$

$$\Rightarrow Z = f(a) . f(h) . [f(a)]^{-1}$$
$$= f(a) . f(h) . f(a^{-1})$$

• وبما أنّ f تشاكل زمري فإنّ :

$$Z = f(a . h . a^{-1})$$

• لكن : $a . h . a^{-1} \in H$ لأنّ H ناظمية .

• ومنه : $f(a . h . a^{-1}) \in f(H)$

أي أنّ : $\underline{\underline{Z = f(a . h . a^{-1}) \in f(H)}}$

$$\Rightarrow \left\{ f(a) . f(H) . [f(a)]^{-1} \subseteq f(H) \right\}$$

• وبذلك تكون : $f(H)$ زمرة جزئية ناظمية في $Im(f)$

((3 + 4)) وظيفة والحل موجود بالكتاب))

مبرهنة :

ليكن : $f : G \longrightarrow G'$ تشاكل زمري ولتكن K زمرة جزئية في G' عندئذ :

1) $f^{-1}(K)$ زمرة جزئية في G .

2) إذا كانت K ناظمية في G' فإنّ : $f^{-1}(K)$ ناظمية في G .

3) $Ker(f) = \langle e \rangle \iff f$ متباين .

الإثبات :

1) • نعلم أنّ : $f^{-1}(K) = \{a ; a \in G , f(a) \in K\}$ وهي مجموعة غير خالية لأنّ : $f(e) = e' \in K$ أي : $e \in f^{-1}(K)$

• ليكن : $a , b \in f^{-1}(K)$ بحيث : $a , b \in G$ و : $f(a) , f(b) \in f^{-1}(K)$

$$f(a . b^{-1}) = f(a) . f(b^{-1}) = f(a) . [f(b)]^{-1} \in K$$

• وبالتالي : $a . b^{-1} \in f^{-1}(K)$ ومنه تكون $f^{-1}(K)$ زمرة جزئية في : G .

2) لنفرض أنّ K ناظمية في G' ولنبرهن أنّ: $f^{-1}(K)$ ناظمية في G أي لنبرهن أنّ:

$$\{\forall g \in G : g . f^{-1}(K) . g^{-1} \subseteq f^{-1}(K)\}$$

ليكن: $z \in g . f^{-1}(K) . g^{-1}$ عندئذٍ: $z = g . x . g^{-1}$; $x \in f^{-1}(K)$

$$\Rightarrow f(z) = f(g . x . g^{-1}) = f(g) . f(x) . f(g^{-1})$$

$$= f(g) . f(x) . [f(g)]^{-1} \in K$$

أي أنّ: $f(z) \in K$

$$\Rightarrow z \in f^{-1}(K)$$

$$\Rightarrow \{g . f^{-1}(K) . g^{-1} \subseteq f^{-1}(K)\}$$

وهذا يبين أن الزمرة $f^{-1}(K)$ ناظمية في G.

3) لزوم الشرط: لنفرض أنّ: $\ker(f) = <e>$

ليكن: $x, y \in G$ حيث: $\{f(x) = f(y)\}$

$$\Rightarrow f(x) . [f(y)]^{-1} = e'$$

$$\Rightarrow f(x) . f(y^{-1}) = e'$$

$$\Rightarrow f(x . y^{-1}) = e' \Rightarrow x . y^{-1} \in \ker(f) = <e>$$

$$\Rightarrow x . y^{-1} = e$$

$$\Rightarrow \{x = y\}$$

وبالتالي فإنّ: f متباين.

كفاية الشرط: لنفرض أنّ f متباين ولنثبت أنّ: $\{\ker(f) = <e>\}$

واضح أنّ: $\boxed{<e> \subseteq \ker(f)}$.

ليكن: $\boxed{x \in \ker(f)}$ عندئذٍ: $f(x) = e' = f(e)$

وبما أنّ: f متباين «أي إذا تساوت صورتي عنصرين فالعنصرين يكونان متساويين»

ومنه يكون: $x = e \Rightarrow \boxed{x \in <e>} \Rightarrow \boxed{\ker(f) \subseteq <e>}$.

ومن السلاسل المتوالية نجد أنَّ :

$$\{Ker(f) = \langle e \rangle\}$$

انتهت المحاضرة .