dim $S_{\lambda_i} = \gamma$

$S_{\lambda_i} = \{v : Av = \lambda_i v \ \& \ v = 0\} \equiv \ker(A - \lambda_i I)$

$\dim(\ker(A - \lambda_i I)) = \gamma$

3. The *geometric multiplicity* γ of an eigenvalue λ of A is the maximum number of independent eigenvectors associated with it. In other words, the geometric multiplicity γ is the dimension of the eigenspace $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$.
4. A matrix is *derogatory* if the geometric multiplicity of at least one of its eigenvalues is larger than one.
5. An eigenvalue is *semisimple* if its algebraic multiplicity is equal to its geometric multiplicity. An eigenvalue that is not semisimple is called *defective*.

Often, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ $(p \leq n)$ are used to denote the *distinct* eigenvalues of A. It is easy to show that the characteristic polynomials of two similar matrices are identical; see Exercise 9. Therefore, the eigenvalues of two similar matrices are equal and so are their algebraic multiplicities. Moreover, if v is an eigenvector of B, then Xv is an eigenvector of A and, conversely, if y is an eigenvector of A, then $X^{-1}y$ is an eigenvector of B. As a result, the number of independent eigenvectors associated with a given eigenvalue is the same for two similar matrices; i.e., their geometric multiplicity is also the same.

1.8.1 Reduction to the Diagonal Form

The simplest form into which a matrix can be reduced is undoubtedly the diagonal form. Unfortunately, this reduction is not always possible. A matrix that can be reduced to the diagonal form is called *diagonalizable*. The following theorem characterizes such matrices.

Theorem 1.6. *A matrix of dimension n is diagonalizable iff it has n linearly independent eigenvectors.*

Proof. A matrix A is diagonalizable iff there exists a nonsingular matrix X and a diagonal matrix D such that $A = XDX^{-1}$ or, equivalently, $AX = XD$, where D is a diagonal matrix. This is equivalent to saying that n linearly independent vectors exist—the n column vectors of X—such that $Ax_i = d_i x_i$. Each of these column vectors is an eigenvector of A. □

A matrix that is diagonalizable has only semisimple eigenvalues. Conversely, if all the eigenvalues of a matrix A are semisimple, then A has n eigenvectors. It can be easily shown that these eigenvectors are linearly independent; see Exercise 2. As a result, we have the following proposition.

Proposition 1.7. *A matrix is diagonalizable iff all its eigenvalues are semisimple.*

Since every simple eigenvalue is semisimple, an immediate corollary of the above result is as follows: When A has n distinct eigenvalues, then it is diagonalizable.

الصيغة القانونية

1.8.2 The Jordan Canonical Form

From the theoretical viewpoint, one of the most important canonical forms of matrices is the well-known Jordan form. A full development of the steps leading to the Jordan form is beyond the scope of this book. Only the main theorem is stated. Details, including the

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$ $\lambda_1 = 1 \Rightarrow \mu_1 = 1$, $\lambda_2 = 4 \Rightarrow \mu_2 = 1$

$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 4)$ $\quad \sigma = \{1, 4\}$

eig $S_{\lambda_1} = \{v = (x, y) : Av = 1v \ \& \ (0,0)\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow P(x) = \{1, 5\}$$

block diagonal

proof, can be found in standard books of linear algebra such as [164]. In the following, m_i refers to the algebraic multiplicity of the individual eigenvalue λ_i and l_i is the *index* of the eigenvalue, i.e., the smallest integer for which $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)^{l_i+1} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)^{l_i}$.

Theorem 1.8. *Any matrix A can be reduced to a block diagonal matrix consisting of p diagonal blocks, each associated with a distinct eigenvalue λ_i. Each of these diagonal blocks has itself a block diagonal structure consisting of γ_i sub-blocks, where γ_i is the geometric multiplicity of the eigenvalue λ_i. Each of the sub-blocks, referred to as a Jordan block, is an upper bidiagonal matrix of size not exceeding $l_i \le m_i$, with the constant λ_i on the diagonal and the constant one on the superdiagonal.*

The ith diagonal block, $i = 1, \ldots, p$, is known as the ith Jordan submatrix (sometimes "Jordan box"). The Jordan submatrix number i starts in column $j_i \equiv m_1 + m_2 + \cdots + m_{i-1} + 1$. Thus,

first block

$$X^{-1}AX = J = \begin{pmatrix} J_1 & & & & \\ & J_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_i & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_p \end{pmatrix},$$

$A \simeq J$

where each J_i is associated with λ_i and is of size m_i, the algebraic multiplicity of λ_i. It has itself the following structure:

$$J_i = \begin{pmatrix} J_{i1} & & & \\ & J_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i\gamma_i} \end{pmatrix}, \text{ with } J_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Each of the blocks J_{ik} corresponds to a different eigenvector associated with the eigenvalue λ_i. Its size l_i is the index of λ_i.

1.8.3 The Schur Canonical Form

Here, it will be shown that any matrix is unitarily similar to an upper triangular matrix. The only result needed to prove the following theorem is that any vector having a 2-norm can be completed by $n - 1$ additional vectors to form an orthonormal basis of $\mathbb{C}^n$.

Theorem 1.9. *For any square matrix A, there exists a unitary matrix Q such that*

$$Q^H A Q = R$$

is upper triangular.

Proof. The proof is by induction over the dimension n. The result is trivial for $n = 1$. Assume that it is true for $n - 1$ and consider any matrix A of size n. The matrix admits

$\dim \mathrm{eigs}_{\lambda_2} = 1 \Rightarrow \gamma_2 = 1$ $\quad$ $\dim \mathrm{eigs}_{\lambda_1} = 1 \Rightarrow \gamma = 1$

$\Rightarrow = \{(x, y) : x = \frac{3y}{2}\}$ $\quad$ $\mathrm{eig}\, s_{\lambda_1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

المحاضرة الثامنة:

« الصفحة الخامسة عشر »

1.8.2 : شكل جوردان القانوني:

من وجهة نظر نظرية، إن من أشهر الأشكال القانونية للمصفوفات هو شكل جوردان المعروف.

إن التطوير الكامل للخطوات المؤدية إلى شكل جوردان هو خارج موضوع هذا الكتاب.

سوف نوجد منه فقط النظرية الأساسية.

التفاصيل ومثل البرهان يمكن أن نجدها في الكتب الأساسية للجبر الخطي.

لاحقاً m_i سنرمز إلى التعددية الجبرية للقيمة الذاتية λ_i.

و بـ l_i نرمز لدليل القيمة الذاتية.

تعريف: الدليل هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة الآتية:

~~Ker(A-A~~ $\ker(A-\lambda_i I)^{l_i+1} = \ker(A-\lambda_i I)^{l_i}$

« الصفحة السادسة عشر »

نظرية 1.8 :

إن أي مصفوفة يمكن أن تحول إلى مصفوفة قطرية عناصر قطرها هي مصفوفات تدعى block تتضمن كل مصفوفة منها p من البلوكات في القطر.

كل بلوكة مرتبطة بقيمة ذاتية مختلفة λ_i.

إن كل هذه البلوكات القطرية لا نهائية قطرية بحد ذاتها أي هي قطرها أيضاً بلوكات جزئية γ_i حيث γ_i هي التعددية الهندسية للقيمة الذاتية λ_i.

يشار إلى كل بلوكة جزئية هي أيضاً بلوكة جوردان.

إن كل بلوكة جزئية هي مصفوفة ثنائية القطر علوية رتبتها لا تتجاوز دليل القيمة الذاتية λ_i والذي هو l_i حيث $l_i \le m_i$ (التعددية الجبرية) تتوضع القيم الذاتية λ_i في القطر الأول والثابت 1 في القطر الثاني.

إن بلوكة رقم i تعرف على أنها مصفوفة جوردان الجزئية وأحياناً تدعى مصفوفة جوردان.

إن مصفوفة جوردان الجزئية ذات الرقم i تبدأ بالعمود الذي رقمه

$j_i = m_1 + m_2 + \cdots + m_{i-1} + 1$

Firstblock

$$X^{-1}AX = J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & & & \\ & \boxed{J_2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \boxed{J_i} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{J_p} \end{pmatrix}$$

حيث كل بلوكة J_i تكون متعلقة بالقيمة الذاتية λ_i ومن مرتبة m_i (أي المصفوفة J_i مرتبتها = التعدد الجبري للقيمة λ_i)

إن J_i ذات الشكل التالي:

$$J_i = \begin{pmatrix} \boxed{J_{i1}} & & & \\ & \boxed{J_{i2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_{i\gamma_i}} \end{pmatrix} \quad \text{with } J_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

نلاحظ إن كل بلوكة J_i تتألف من بلوكات جزئية J_{ik} عددها يساوي التعدد الهندسي γ_i للقيمة الذاتية λ_i

نلاحظ: هذه البلوكات عبارة عن مصفوفات ثلاثية القطر، قطرها الرئيسي الأول هو القيمة الذاتية λ_i مكررة بعدد التعددية الجبرية والقطر الرئيسي الثاني هو الواحد.

إن كل بلوكة J_{ik} تكون مرتبطة بشعاع ذاتي مختلف مرتبط بالقيمة الذاتية λ_i.
إن رتبة المصفوفة J_{ik} هو p_i دليل القيمة الذاتية λ_i والذي هو التعدد الهندسي δ_i

انتهت المحاضرة الثامنة