المحاضرة الرابعة عشر

المتتاليات المنشطرة .

مفاهيم أساسية

نقول عن المتتالية التامة

$$0 \to M \xrightarrow{f} N$$

بأنها منشطرة إذا وجد تشاكل

$$\varphi : N \to M$$

يحقق $\varphi \circ f = I_M$ ← كتطبيق

ونسمي φ التشاكل المنشطر

- نقول عن المتتالية التامة

$$N \xrightarrow{g} P \to 0$$

إنها منشطرة إذا وجد تشاكل مودولي

$$\pi : P \to N$$

يحقق $g \circ \pi = I_P$

- نقول عن المتتالية التامة

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$$

إنها منشطرة إذا كانت منشطرة من اليسار ومن اليمين أي إذا وجد تشاكلين مودوليين

$\varphi : N \to M$ and $\pi : P \to N$

$\varphi \circ f = I_M$ and $g \circ \pi = I_P$

مبرهنة .

إذا كانت المتتالية التامة

$$0 \to M \underset{\varphi}{\overset{f}{\rightleftarrows}} N \xrightarrow{g} P \to 0$$

فإن القضيتين التاليتين متكافئتان

1) المتتالية (I) منشطرة من اليسار
2) Imf حد مكمل مباشر في N

الإثبات :

$(1) \Rightarrow (2)$

أياً كان $n \in N$ فإن

$$\varphi(\underline{n - f\circ\varphi(n)}) = \varphi(n) - \varphi(n) = 0$$

$$n - f\circ\varphi(n) \in Ker\varphi$$

$$n - \underbrace{f\varphi(n)}_{\in Imf} \in Ker\varphi$$

$$\Rightarrow n \in Imf + Ker\varphi$$

أي $\boxed{N = Imf + Kerf}$

- أياً كان $x \in Imf \cap Ker\varphi$

$x \in Imf$ and $x \in Ker\varphi$

$x = f(m) : m \in M$ and $\varphi(x) = 0$

ومنه $\varphi(f(m)) = 0 \xRightarrow{\varphi o f = I} m = 0$

ومنه $x = 0$ أي $\boxed{Imf \cap Kerf = 0}$

$(2) \Rightarrow (1)$

بما أن Imf حد مكمل مباشر في N فإنه يوجد مودول جزئي A في N

بحيث $N = Imf \oplus A$

$$\forall n \in N : n = x + a \,;\, x \in Imf, a \in A$$

بما أن f متباين فإن $Imf \cong M$ تماثل

وبالتالي من أجل كل عنصر $x \in Imf$ فإنه يوجد عنصر وحيد $f^{-1}(x) \in M$ (تماثل عكسي)

وبذلك نحصل على التطبيق $\varphi : N \to M$

$$\varphi(n = x + a) = f^{-1}(x)$$

إن φ تشاكل مودولي

كما أنه أياً كان $m \in M$ فإن

$$p\circ f(m) = p(f(m))$$
$$= f^{-1}(f(m))$$
$$= m$$

مبرهنة:

إذا كانت المتتالية

$0 \to M \xrightarrow{f} N \underset{\pi}{\overset{g}{\rightleftarrows}} P \to 0$ تامة

فإن القضيتين التاليتين متكافئتان

1) المتتالية (I) منشطرة من اليمين

2) $\ker g$ جمع مكمل مباشر في N

الإثبات:

$(1) \Rightarrow (2)$

ليكن $\pi : P \to N$ التشاكل المنشطر

أي $g\circ \pi = I_P$

• أياً كان $n \in N$ فإن

$$g(n - \pi\circ g(n)) = g(n) - g(n) = 0$$
$$n - \pi\circ g(n) \in \ker g$$
$$n - \underbrace{\pi\circ(g(n))}_{\in Im\pi} \in \ker g$$

• وهذا يبين أن $N = \ker g + Im\pi$

• كما أنه أياً كان

$x \in \ker g \cap Im\pi$

فإن $x \in \ker g$ and $x \in Im\pi$

$g(x) = 0$ and $x = \pi(p)\ ;\ p \in P$

$g(\pi(p)) = 0 \Rightarrow p = 0$

أي أن $x=0$ إذن $\ker g \cap Im\pi = 0$

$(2) \Rightarrow (1)$

بما أن $\ker g$ جمع مكمل مباشر في N

فإنه يوجد مودول جزئي A من N بحيث

$$N = \ker g \oplus A$$

$\forall n \in N : n = x + a\ ,\ x \in \ker g\ ,\ a \in A$

• نأخذ مقصور g على A

$$g_A : A \to P$$
$$g_A(a) = g(a)$$

إن g_A غامر لأنه

أياً كان $p \in P$ فإنه يوجد $n = x + a \in N$

بحيث يكون

$g(n = x + a) = p$ (لأن g غامر)

$$\underbrace{g(x)}_{0\ \ x\in\ker g} + g(a) = p$$

$g(a) = p\ ;\ a \in A$

• كما أن g_A متباين لأنه أياً كان

$a \in \ker g_A$ فإن

مقصور $g_A(a) = 0$ and $a \in A$

$g(a) = 0$ and $a \in A$

$a \in \ker g$ and $a \in A$

$$a \in \underbrace{\ker g \cap A}_{\text{لأنهم مجموع مباشر}} = 0$$

أي أن $a = 0$

أصبح $g_A : A \to P$ تقابل

وهو تشاكل مودولي أي تماثل مودولي

لنأخذ $\pi : P \to N$

تشاكل مودولي $\pi(p) = g_A^{-1}(p)$

لأنه أياً كان $p \in P$ فإن

$$g \circ \pi(p) = g(\pi(p))$$

$$= g(g_A^{-1}(p)) = p$$

إذن π هو تشاكل منشطر

ملاحظة..

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, shift left, "f"] & N \arrow[l, shift left, "\rho"] \arrow[r, shift left, "g"] & P \arrow[l, shift left, "\pi"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$N = \operatorname{Im} f \oplus \ker \rho \qquad N = \ker g \oplus \operatorname{Im} \pi$$

$$\operatorname{Im} f \cong M \qquad \operatorname{Im} \pi \cong P$$

$N \cong M \oplus P$ ..؟.. هل