الثلاثاء: 18/11/2014

# المحاضرة الثانية عشرة

**مبرهنة:** الجزء الثاني من المبرهنة في المحاضرة السابقة.

إذا كانت $\vec{r}$ تمثيلاً نظامياً من الصف $C_n$ قطعياً $(n \geq 1)$ لمنحنٍ $L$ فإن التمثيل الوسيطي الطبيعي سيكون نظامياً من الصف $C_n$ قطعياً لمنحنٍ $L$

**الإثبات:**

من الفرض: $\vec{r}$ تمثيلاً نظامياً من الصف $C_n$ قطعياً، فيوجد تجزئة:

$$t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b$$

بحيث يكون:

$$\vec{r}\,|\,]t_{i-1}, t_i[ \quad \text{من الصف} \quad C_n$$

لتكن $\tau_0$ نقطة من $I$ لكنها ليست من نقاط التجزئة السابقة أي $\vec{r}(\tau_0)$ نظامية

$$\Rightarrow \quad \vec{r}\,'(\tau_0) \neq 0$$

وبما أن $\vec{r}$ من الصف $C_n$ في النقطة $\tau_0$ فإن $\vec{r}$ سيكون من الصف $C_n$ في جوار $\tau_0$

نأخذ الوسيط الطبيعي:

$$s = \int_{t_0}^{t} \|\vec{r}\,'(u)\|\, du$$

بما أن $\vec{r}\,'$ مستمر عند $\tau_0$ (برهانا من المحاضرة السابقة) ومن الصف $C_{n-1}$ (لأن $\vec{r}$ من الصف $C_n$).

معنى ذلك:

$$\frac{ds}{dt} = \|\vec{r}\,'(t)\|$$

ولأجل كل $t$ من جوار الـ $\tau_0$

$$\frac{ds}{dt}(\tau_0) = \underbrace{\|\vec{r}\,'(\tau_0)\|}_{\text{هذا التركيب من الصف } C_{n-1}} \neq 0$$

(لأنه $\tau_0$ نظامية)

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$$

$\Rightarrow \quad \frac{dt}{ds}(0) = \frac{1}{\|\vec{r}\,'(t_0)\|} \neq 0$ موجودة ومستمرة في جوار $s(t_0)=0$

من الصف $C_{n-1}$ أيضاً (لأن البسط ثابت من الصف $C_\infty$ والمقام من الصف $C_{n-1}$ عند جوار $t_0$ فالمقام لا ينعدم على هذا الجوار فحاصل القسمة سيكون قابل للاشتقاق وهذا المشتق سيكون مستمر).

نستنتج:

$$\frac{d\vec{r}}{ds}(0) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)\cdot\frac{dt}{ds}(0) \quad ; \quad s_0 = \int_{t_0}^{t_0} \|\vec{r}\,'(u)\|\,du = 0$$

من الصف $C_{n-1}$ في جوار (0) $\Leftarrow$ من الصف $C_{n-1}$ في جوار $t_0$ — من الصف $C_{n-1}$ في جوار الـ 0

أي أن المشتق موجود في النقطة $(s=0)$ وأيضاً موجود عند كل النقاط في جوار الـ (0) أي

$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}$ موجود ومستمر.

وأيضاً المشتقات:

$$\frac{d_2 t}{ds^2}, \ \frac{d_3 t}{ds^3}, \ \dots, \ \frac{d_n t}{ds^n}$$

جميعها موجود ومستمر في جوار الصفر وبشكل خاص في النقطة $s=0$

وبالتالي $\frac{d_2\vec{r}}{ds^2}$ موجود ومستمر في جوار الصفر وهكذا الأمر بالنسبة للمشتقات

حتى المرتبة $n$ أي أن $\frac{d_n\vec{r}}{ds^n}$ موجود ومستمر في جوار النقطة $s=0$ المقابلة

للنقطة $t_0$

$\Leftarrow$ انطلقنا من $t_0$ اختيارية ورأينا أن التمثيل $\vec{r}$ الطبيعي سيكون من نفس الصف وبالتالي

المشتقات

$$\frac{d\vec{r}}{ds}, \ \frac{d_2\vec{r}}{ds^2}, \ \dots, \ \frac{d_n\vec{r}}{ds^n}$$

نتيجة :

النقاط الشاذة الأساسية لمنحنٍ $L$ هي بالضبط النقاط الشاذة للتمثيل الوسيطي الطبيعي المعرف له.

الإثبات :

إذا كانت $p$ نقطة شاذة أساسية لمنحنٍ $L$ فإنها شاذة في جميع التمثيلات ومنها التمثيل الطبيعي

وإذا كانت $p$ شاذة في التمثيل الطبيعي فإنها ستكون شاذة في أي تمثيل وسيطي آخر لمنحنى $L$.

لأنها إذا كانت $p$ نقطة نظامية في تمثيل ما فإنها ستكون نظامية في التمثيل الوسيطي الطبيعي (معرفة)

$\Leftarrow$ $p$ هي نقطة شاذة أساسية.

ملاحظة :

قد تكون نقطة شاذة في تمثيل ما ولا تكون شاذة في التمثيل الوسيطي الطبيعي

لكن إذا كانت نقطة نظامية في تمثيل ما فإنها ستكون نظامية في التمثيل الوسيطي الطبيعي

- إذا وجد تمثيل منتظم ما فإن التمثيل الطبيعي على الأقل سيكون منتظم أيضاً.

مبرهنة :

إن مشتق متجه موضع نقطة من منحنٍ بالنسبة للوسيط الطبيعي (في حال وجوده) هو متجه واحدة.

الإثبات غير مطلوب

فكرة الإثبات :

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$$

نأخذ النظيم للطرفين

$$\left\|\frac{d\vec{r}}{ds}\right\| = \frac{\|\vec{r}\,'(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|} = 1$$

- نستطيع أن نثبت أيضاً أن النقطة إذا كانت شاذة في التمثيل الوسيطي الطبيعي فإن المشتق لهذا التمثيل غير موجود عند هذه النقطة

نستنتج: الشذوذ في تمثيل وسيطي طبيعي بسبب عدم وجود المشتقة، أما الشذوذ في تمثيل ما سببه إما المشتقة غير موجودة أو موجودة ومعدوم.

مثال: اللولب:

وجدنا سابقاً أن اللولب يمثل بـ:

$$\vec{r}: \begin{cases} x = a\cos t & ; -\infty < t < +\infty \\ y = a.\sin t & ; \quad a > 0 \\ z = bt & ; \quad b \neq 0 \end{cases}$$

اللولب من الصنف $C^\infty$ وهو تحليلي لأن المركبات تحليلية.

$$\vec{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, \underset{\neq 0}{b})$$

$$\Rightarrow \vec{r}'(t) \neq 0 \qquad \forall t \in R$$

$\Leftarrow$ جميع نقاط اللولب نظامية في التمثيل $\vec{r}$.

$\Leftarrow$ جميع نقاط اللولب نظامية في التمثيل الوسيطي الطبيعي (حسب مبرهنة)

إيجاد التمثيل الوسيطي الطبيعي:

لنأخذ الوسيط الطبيعي

$$s = \int_{t_0}^{t} \|\vec{r}'(u)\| du$$

لنأخذ $t_0 = 0 \in R$

$$\Rightarrow s = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, du = \sqrt{a^2+b^2}\; t$$

$$\Rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \neq 0$$

التمثيل الوسيطي الطبيعي للولب:

$$\vec{r}_1: \begin{cases} x = a\cos \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y = a.\sin \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ z = b.s \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

من الممكن إيجاد تمثيل وسيطي آخر للولب حسب مبدأ قياس أطوال الأقواس على اللولب:

$$\vec{r}(0) = (a, 0, 0) \longrightarrow$$ نقطة من اللولب تقابل $t = 0$

إن $s(t)$ يمثل طول القوس من اللولب المحصور بين النقطة $\vec{r}(0) = (a, 0, 0)$ والنقطة التي متجه موضعها $\vec{r}(t)$.

لنثبت أن مشتق متجه الموضع بالنسبة للوسيط الطبيعي للولب هو متجه واحدة.

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}\,'(s)$$

$$x' = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$y' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$z' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow \|\vec{r}\,'(s)\| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = 1$$

هو متجه واحدة.