مبرهنة:

إذا كان البيان G بيان أويلر، فإن الطريق المنشأة بواسطة خوارزمية فلوري هي دائرة أويلر في البيان G.

الإثبات:

لتكن

$$W_n = \langle v_0\ e_1\ v_1 \ldots e_n\ v_n \rangle$$

هي الطريق الذي حصلنا عليه في خوارزمية فلوري.

وبالتالي فإن: $deg(v_n)=0$ في البيان G_n.

وأيضاً: $deg(v_0)=0$ في البيان G_n.

وبالتالي فإن $v_0 = v_n$

إذاً W_n هو دائرة في البيان G.

ولنثبت الآن أن هذه الدائرة تحوي جميع أضلاع البيان.

لنفرض جدلاً أن الدائرة W_n لا تحوي جميع أضلاع البيان G.

ولتكن مجموعة العقد: $S = \{v \in V_n \ ; \ deg(v) > 0\}$

فتكون $S \neq \phi$ حسب الفرض الجدلي.

عندئذٍ فإن المجموعة $\bar{S} = V - S$

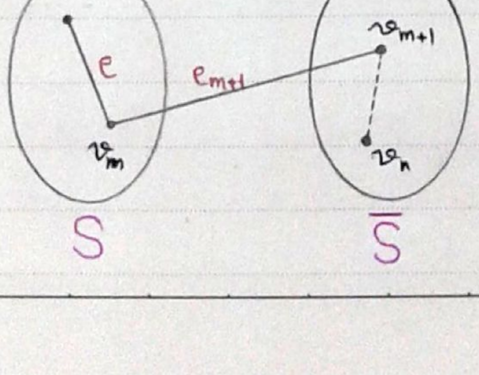
هي مجموعة العقد في البيان G_n والتي درجتها تساوي الصفر.

ولكن نعلم أن $deg(v_n) = 0 \Longrightarrow v_n \in \bar{S}$

لتكن $0<m<n \ ; \ m \in \mathbb{Z}$ أكبر عدد صحيح بحيث: $v_m \in S \ \& \ v_{m+1} \in \bar{S}$

ولما كان W_n ينتهي في $\bar{S}$ فإنه يوجد ضلع وحيد e_{m+1} يربط بين المجموعتين $S, \bar{S}$ في البيان G_m، ويكون هذا الضلع هو ضلع قاطع في البيان G_m يؤثر على العقدة v_m

ويمكن أن نمثل ذلك وفق ما يلي:



ولكن بما أن $v_m \in S$ فإنه يوجد ضلع e مؤثر عليها في البيان G_m بحيث:
$e \neq e_m \quad , \quad e \neq e_{m+1}$
وحسب خوارزمية فلوري فإن الضلع e جسر في البيان G_m.

ليكن $G_m[S]$ هو البيان المولد بوساطة المجموعة S في البيان G_m فيكون:
$G_m[S] \subset G_m$
وليكن $G_n[S]$ هو البيان المولد بوساطة المجموعة S في البيان G_n فيكون:
$G_n[n] \subset G_n$ ①
ولكن $G_n \subset G_m$ ② $\Longleftarrow$ $G_n[S] \subseteq G_m[S]$
من ① و ② نجد أن: $G_n[S] \subset G_m$
وبما أن الضلع e ينتمي إلى كل من $G_m, G_n[S]$ وهو جسر في البيان G_m فإن الضلع e هو جسر في البيان $G_n[S]$.
ومن جهة أخرى بما أن الضلع e_{m+1} جسر في البيان G_m وحسب تعريف العدد m بأنه أكبر عدد صحيح بحيث $x_m \in S$ فإن: $G_m[S] = G_n[S]$
ولكن لكل عقدة $v \in S$ فإن $deg(v)$ في البيان $G_n[S]$ تساوي $deg(v)$ في البيان G_n $\Longleftarrow$ جميع عقد البيان $G_n[S]$ زوجية، ومنه فالبيان $G_n[S]$ لا يحتوي على جسور وهذا تناقض مع كون e جسر فيه.
ومنه فالفرض الجدلي خاطئ.
$\Longleftarrow$ الدائرة W_n تحوي جميع أضلاع البيان G وهو المطلوب.

الحالة الثانية: البيان المعطى هو بيان غير أويلري:

لنفرض أن البيان G هو بيان غير أويلري، عندئذٍ لا توجد دائرة أويلر بحيث تمر على الأضلاع دون تكرار. لذا لابد من تكرار بعض الأضلاع حتى نتمكن من المرور على جميع أضلاع البيان.

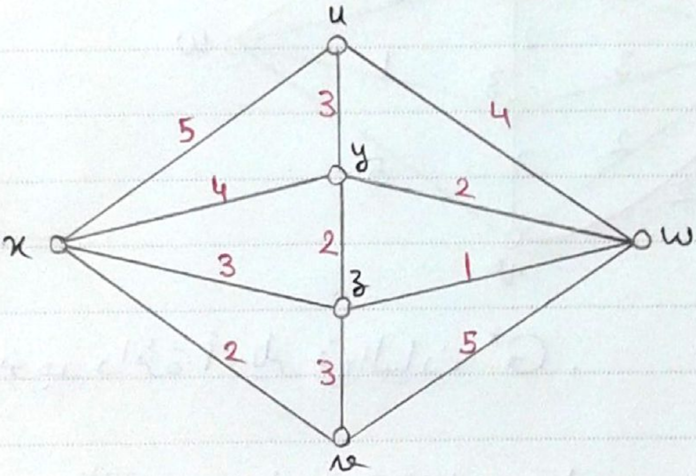
ومن الملائم هنا أن نقوم بمضاعفة بعض الأضلاع.

تذكرة: الضلع المضاعف هو عبارة عن ضلعين لهما نفس البداية ونفس النهاية وإذا كان البيان موزوناً فيكون لهما نفس الوزن.

- هنا سوف ينتج لدينا عدة احتمالات، فكيف نعرف أية أضلاع علينا أن نضاعف؟

لنناقش الأمر من خلال المثال التالي:

مثال: ليكن لدينا البيان التالي،



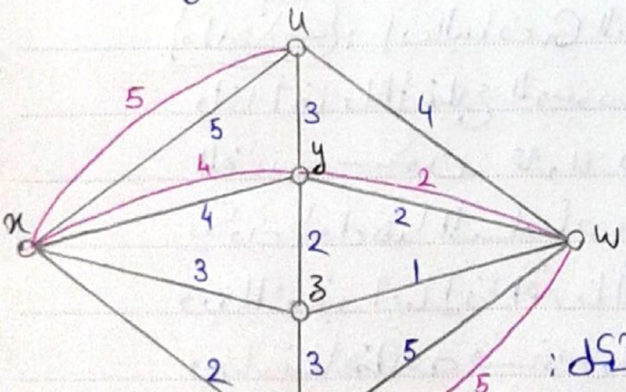
إذا أخذنا الدائرة: $x\,u\,y\,w\,v\,z\,w\,y\,x\,u\,w\,v\,x\,z\,y\,x$

فنلاحظ أن الضلع xu تكرر مرتين

والضلع xy تكرر 3 مرات

والضلع wv تكرر مرتين

والضلع yw تكرر مرتين.



بمضاعفة الأضلاع التي تكررت في البيان نحصل على الشكل:

وهذا البيان أصبح أويلرياً لأن جميع عقده ستصبح زوجية

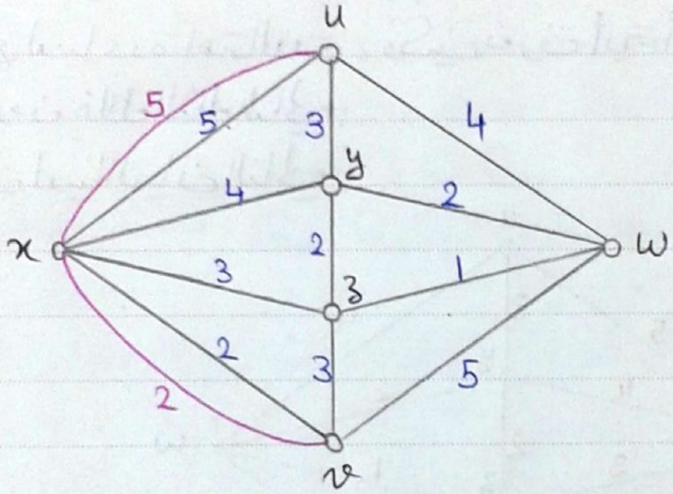
ولكن هذا البيان ليس أمثلياً.

لنبدأ من العقدة x ونضع مساراً بحيث نختار الكلفة الأصغرية بين الأضلاع المؤثرة على العقد، والتي لم نخترها من قبل إلا إذا لم يكن هناك خيار آخر، وهكذا حتى نغلق المسار بعد المرور على كل الأضلاع.

وبهذا نحصل على الدائرة $\langle x\, v\, z\, w\, y\, z\, x\, y\, u\, w\, v\, x\, u\, x \rangle$

ويكون قد حصلنا على البيان G^* الأويلري بحيث يتحقق أن المجموع التالي أصغري:

$$\sum_{e \in E^* \setminus E} w(e)$$



والآن نوجد دائرة أويلر في البيان G^*.

- وضعت هذه الخوارزمية عام 1973 من قبل Edmond & Tohnson

ملاحظة: إن البيان G السابق يحوي عقدتين فرديتين وهما العقدتين u, v.
فإذا أخذنا الأضلاع الموجودة في البيان G^* وغير الموجودة في البيان G، فإن العقد الفردية ستكون u, v نفسها، وبالتالي فهما مرتبطين بمسار p^* بحيث يكون طول هذا المسار أصغرياً.
وبذلك نجد أننا إذا اخترنا أصغر مسار بين هاتين العقدتين في البيان الأصلي G وضاعفنا أضلاعه فسنحصل على بيان أويلري تكون فيه دائرة أويلر بأقل كلفة ممكنة.