المحاضرة 21 الواحدة والعشرون

التابع التوافقي :

نفرض $u = u(x,y)$ تابع حقيقي قابل للاشتقاق على المنطقة D ومشتقاته الجزئية مستمرة على D عندئذ نقول عن u أنه توافقي على D إذا حقق معادلة لابلاس :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

تمرين: أثبت أن التابع $u = u(x,y) = y + 2xy$ توافقي على $\mathbb{C}$.

الحل: نلاحظ أن التابع u هو كثير حدود بمتحولين x, y فهو معرف ومستمر وقابل للاشتقاق على $\mathbb{C}$، كذلك :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 + 2x \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0$$

محققة دوماً ومنه التابع توافقي على $\mathbb{C}$.

مبرهنة: نفرض $w = f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ تابع تحليلي على المنطقة D عندئذ u, v توافقيان على D.

الإثبات:

بما أن $f(z)$ تابع تحليلي على D عندئذ معادلتي كوشي ريمان محققتان على D أي :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \xrightarrow[\text{بالنسبة لـ } x]{\text{بالاشتقاق جزئياً}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad —(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \xrightarrow[\text{بالنسبة لـ } y]{\text{بالاشتقاق جزئياً}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \quad —(2)$$

وبما أن المشتقات الجزئية مستمرة فرضاً فإنه بجمع (1) مع (2) نجد :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

ومنه التابع توافقي.

بنفس الطريقة نثبت أن v توافقي أيضاً.

نسمي في هذه الحالة u مرافقاً توافقياً للتابع v كما نسمي v مرافقاً توافقياً لـ u بمعنى إذا أعطينا أحدهما نستطيع إيجاد الآخر بحيث يكون التابع $w=f(z)=u+iv$ تحليلي وذلك يتم بالاعتماد على معادلتي كوشي ريمان.

تمرين: أثبت أن التابع $u=u(x,y)=x^2-y^2+2xy+x$ توافقي على $\mathbb{C}$ ثم أوجد مرافقاً توافقياً له v بحيث يكون التابع $w=f(z)=u+iv$ تحليلي.

الحل نلاحظ أن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2y+1 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y+2x \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-2=0$$

محققة دوماً على $\mathbb{C}$

ومنه التابع توافقي على $\mathbb{C}$.

لنفرض أن $v=v(x,y)$ هو مرافق توافقي لـ u عندئذ معادلتي كوشي ريمان محققتان ومنه:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}=2x+2y+1 \quad — (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -\frac{\partial v}{\partial x}=2y-2x \quad — (2)$$

نكامل (1) بالنسبة لـ y فنجد:

$$v=\int(2x+2y+1)\,dy=2xy+y^2+y+g(x) \quad — (3)$$

ثابت المكاملة بالنسبة لـ y وهو تابع لـ x

نشتق (3) بالنسبة لـ x فنجد

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y+g'(x) \quad — (4)$$

نطابق (4) مع (2) فنجد $(5) — g'(x)=-2x$

نكامل (5) بالنسبة لـ x فنجد: $g(x)=-x^2+c \quad : c\in\mathbb{R}$

نعوض في (3) فنجد مجموعة المرافقات $\boxed{v=v(x,y)=2xy+y^2+y-x^2+c \quad : c\in\mathbb{R}}$

تمرين: دورة (2013-2014) (20 علامة)

أثبت أن التابع $u = e^{x}\cos y$ توافقي على $\mathbb{C}$ ثم أوجد مجموعة المرافقات التوافقية v التي تجعل $f = u + iv$ تحليلي ثم أوجد التابع الذي يحقق $f(0)=1$ والصورة المباشرة للمجموعة $A = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) = 1\}$ وفق هذا التابع.

الحل: نلاحظ أن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos y\, e^{x} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos y\, e^{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{x}\sin y \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{x}\cos y$$

ومنه

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{x}\cos y - e^{x}\cos y = 0$$

$\Leftarrow$ معادلة لابلاس محققة على $\mathbb{C}$ أي التابع توافقي على $\mathbb{C}$.

لنفرض أن $v = v(x,y)$ مرافق توافقي لـ u عندئذٍ معادلتي كوشي ريمان محققتان ومنه

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = \cos y \cdot e^{x} \quad —(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = e^{x}\cos y \quad —(2)$$

نكامل (1) بالنسبة لـ y فنجد

$$v = \int \cos y\, e^{x}\, dy = e^{x}\sin y + g(x) \quad —(3)$$

نشتق (3) بالنسبة لـ x فنجد:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sin y\, e^{x} + g'(x) \quad —(4)$$

نطابق (4) مع (2) فنجد

$$g'(x) = 0 \quad —(5)$$

نكامل (5) بالنسبة لـ x فنجد: $g(x) = C \quad ; C \in \mathbb{R}$

نعوض في (3) فنجد مجموعة المرافقات $v = e^{x}\sin y + C$

ومنه التابع $W = f(z) = e^{x}\cos y + i e^{x}\sin y + iC$

$$= e^{x}(\cos y + i\sin y) + iC = e^{x}\, cis\, y + iC$$

$$= e^{x}e^{iy} + iC = e^{x+iy} + iC = e^{z} + iC$$

ولنوجد التابع الذي يطابق $f(0)=1$ نعوض $(x,y)=(0,0)$

$$W = f(0) = e^{0}\cos 0 + i e^{0}\sin 0 + iC = 1 + iC = 1 \Rightarrow \boxed{C=0}$$

ومنه التابع الذي يحقق $f(0)=1$ هو

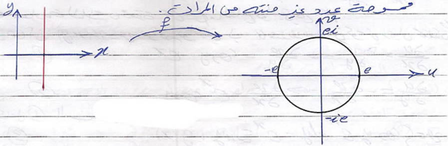
$$w=f(z)=e^{x}\cos y+ie^{x}\sin y=e^{x}e^{iy}=e^{z}$$

- نلاحظ أن $A=\{z=x+iy\in\mathbb{C} \ ; x=1\}$

هي نقاط المستقيم $x=1$

$$f(A)=\{w\in\mathbb{C} : w=e^{z} \ ; Re(z)=1\}$$
$$=\{w\in\mathbb{C} : w=e^{1+iy} : y\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{w\in\mathbb{C} : w=e\cdot cis\,y : y\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{w\in\mathbb{C} \ ; w=e\cos y+ie\sin y : y\in\mathbb{R}\}$$
$$=C(0,e)$$

ومنه الصورة المباشرة هي الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها e ممسوحة عدد غير منته من المرات.



وظيفة

أثبت أن التابع $u=xy-x+1$ توافقي في $\mathbb{C}$ ثم أوجد مجموعة المرافقات التوافقية v التي تجعل $f=u+iv$ تحليلي.

Subject ______ التاريخ :

Date ______ الموضوع :

حل الوظيفة /خاص/

نلاحظ أن

$u = xy - x + 1$

$\frac{\partial u}{\partial x} = y - 1$ ، $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial u}{\partial y} = x$ ، $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0 \Rightarrow$ محققة دوماً لـ u ومنه التابع توافقي لـ u

لنفرض أن $v = v(x,y)$ مرافق توافقي لـ u عندئذ معادلتي كوشي ريمان محققتان ومنه

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = y - 1$ — ①

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -\frac{\partial v}{\partial x} = +x \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -x$ — ②

نكامل ① بالنسبة لـ y فنجد $v = \int (y-1)\,dy = \frac{1}{2}y^2 - y + g(x)$ — ③

نشتق ③ بالنسبة لـ x فنجد $\frac{\partial v}{\partial x} = g'(x)$ — ④

نطابق ④ مع ② فنجد $g'(x) = -x$ — ⑤

نكامل ⑤ بالنسبة لـ x فنجد $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + C$; $C \in \mathbb{R}$

نعوض في ③ فنجد مجموعة المرافقات v

$v = v(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - y - \frac{1}{2}x^2 + C$

ومنه نجد التابع التحليلي

$f(z) = u + iv = xy - x + 1 + i\left(\frac{1}{2}(-x^2 + y^2) - y + C\right)$